# Viskozna tekućina

## « Hidrodinamika »

Ivo Batistić

Fizički odsjek, PMF
Sveučilište u Zagrebu

predavanja 2015 (zadnja inačica 16. travnja 2015.)

# Pregled predavanja

Viskozna tekućina

Primjeri

Zakon sličnosti

Opticanje kugle u viskoznoj tekućini

Oseenova korekcija

# Viskozna tekućina

Jednadžba gibanja viskozne tekućine:

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right)=-\vec{\nabla}p+\eta\,\Delta\vec{v}+\underbrace{(\zeta+\frac{\eta}{3})\,\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})}_{=0\text{ za nestlačivu tekućinu}}$$

Iz jednadžbe se može eliminirati nepoznati tlak primjenom rotacije:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{v} &= -\vec{\nabla}\times[\underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}}_{=\frac{1}{2}\vec{v}^2-\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v})}]+\eta\,\Delta(\vec{\nabla}\times\vec{v})\\ &= -\vec{\nabla}\times[\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v})]+\eta\,\Delta(\vec{\nabla}\times\vec{v})\end{aligned}$$

To je ona ista jednadžbe dobivena za idealnu tekućinu osim što postoji dodatni član koji dolazi od viskoznosti.

# Viskozna tekućina

U slučaju nestlačive tekućine vrijedi:

$$\vec{\nabla} \times [\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})] = (\vec{\nabla} \times \vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{\nabla} \times \vec{v}$$

pa je gibanja nestlačive viskozne tekućine određeno jednadžbom:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{\nabla} \times \vec{v} - (\vec{\nabla} \times \vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \eta \, \Delta(\vec{\nabla} \times \vec{v}).$$

Poznavajući raspodjelu brzina tlak se može odrediti iz Poissonove jednadžbe:

$$\begin{aligned} \Delta p &= -\rho \sum_{i,j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \\ &= -\rho \, \vec{\nabla} \cdot [(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}] \end{aligned}$$

koja se dobiva primjenom divergencije na NS jednadžbu.

# Granični uvijet

Zbog viskoznog trenja brzina tekućine na nepokretnoj površini točno je jednaka nuli:

$$\vec{v}\big|_{\text{rub}} = 0.$$

Kod idealne tekućine samo je vertikalna komponenta brzine trebala biti jednaka nuli, dok je tangencijalna komponenta mogla biti različita od nule. Kod viskozne tekućine obje komeponete brzine moraju biti jednake nuli.

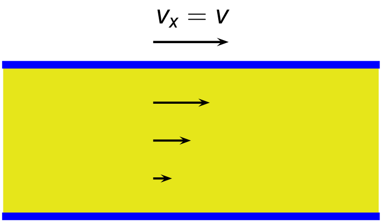
# 1. primjer

**Zadatak:** Odrediti stacionarno gibanje tekućine koja se nalazi između dvije ravnine, $z = 0$ i $z = h$ ako

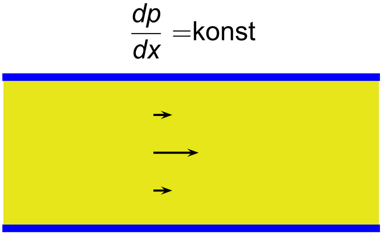
a) ravnina $z = h$ se giba konstantnom brzinom $v$ u $x$-smjeru a tlak je svuda konstantan.

b) Obje ravnine miruju ali postoji konstantan gradijent tlaka uzduž $x$-osi

Također odrediti prosječnu brzinu gibanja tekućine u oba slučaja.




slučaj a




slučaj b

# 1. primjer - slučaj a

Iz simetrije problema:

$$v_y = v_z = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Jedina komponenta brzine različita od nule je $v_x$ koja ne ovisi o $x$ a niti o $y$:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0.$$

Također za stacionarni problem:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0.$$

Iz NS jednadžbi se dobiva:

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \nu \, \Delta \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}}_{=0} = \nu \, \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0.$$

# 1. primjer - slučaj a

Slijedi:

$$v_x = a + b\, z.$$

Koristeći rubne uvjete:

$$v_x(z = 0) = 0 \qquad \text{i} \qquad v_x(z = h) = v,$$

slijedi:

$$\vec{v} = (v\, \frac{z}{h}, 0, 0) \qquad \text{i} \qquad p = konst.$$

Prosječna brzina:

$$\overline{v_x} = \frac{1}{h} \int_0^h dz\, v_x(z) = \frac{v}{2}.$$

# 1. primjer - slučaj b

Iz simetrije problema:

$$v_y = v_z = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = konst = \frac{\Delta p}{\Delta x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Jedina komponenta brzine različita od nule je $v_x$ koja ne ovisi o $x$, $y$ i $t$:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0.$$

Iz NS jednadžbi se dobiva:

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \nu\,\Delta\vec{v} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p \quad \Rightarrow \quad \underbrace{v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}}_{=0} = \nu\,\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta}\,\frac{\Delta p}{\Delta x}$$

Rješenje je:

$$v_x(z) = \frac{1}{2\eta}\,\frac{\Delta p}{\Delta x}\,z^2 + a + b\,z.$$

# 1. primjer - slučaj b

Koristeći rubne uvjete:

$$v_x(z=0)=0 \qquad \text{i} \qquad v_x(z=h)=0,$$

slijedi:

$$v_x(z) = -\frac{1}{2\eta}\left(\frac{\Delta p}{\Delta x}\right) z\,(h-z)$$

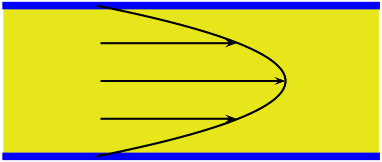
Prosječna brzina:

$$\overline{v_x} = \frac{1}{h}\int_0^h dz\, v_x(z) = \frac{h^2}{12\eta}\left(\frac{\Delta p}{\Delta x}\right)$$

Vrijedi:

$$v_x \geq 0 \quad \text{ako je} \quad \left(\frac{\Delta p}{\Delta x}\right) < 0$$

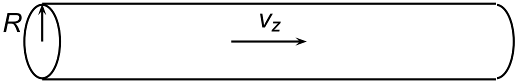
$$v_x \leq 0 \quad \text{ako je} \quad \left(\frac{\Delta p}{\Delta x}\right) > 0$$



# 2. primjer

**Zadatak:** Odrediti stacionarno proticanje tekućine kroz cijev radijusa $R$ uzrokovano konstantnim gradijentom tlaka duž cijevi:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = konst.$$




Iz simetrije problem se treba rješavati u cilindričnom koordinatnom sustavu. Tada je:

$$v_\varphi = v_\rho = 0, \qquad v_z \neq 0$$

Također je:

$$\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \neq 0,$$

te

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{\partial p}{\partial \rho} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} \neq 0,$$

# 2. primjer

NS jednadžba za $v_z$:

$$\begin{aligned}\underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})v_z}_{=0} &= -\frac{1}{n}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\,\Delta v_z \\ &= -\frac{1}{n}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\,\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\,\rho}\left(\rho\frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right)\right],\end{aligned}$$

gdje je umjesto gustoće $\rho$ stavljena oznaka $n$ kako ne bi došlo do pomutnje s radijalnom komponentom koja ima istu oznaku. Prema tome, $v_z$ zadovoljava jednadžbu:

$$\frac{\partial}{\partial\,\rho}\left(\rho\frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right) = \frac{1}{\eta}\,\frac{\partial p}{\partial z}\,\rho$$

Dva puta integrirajući dobiva se:

$$v_z = \frac{1}{4\eta}\,\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\,\rho^2 + a\,\ln\rho + b.$$

# 2. primjer

Uzimajući u obzir rubni uvjet:

$$v_z(\rho = R) = 0 \quad \text{te} \quad |v_z(\rho = 0)| < \infty$$

slijedi da je:

$$v_z = -\frac{1}{4\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)(R^2 - \rho^2)$$

Količina tekućine koja proteče kroz cijev u jedinici vremena je:

$$\begin{aligned} Q &= \int dS\, \underbrace{v_z\, n}_{=j_z} = 2\pi n \int_0^R d\rho\, \rho\, \frac{1}{4\eta}\left|\frac{\partial p}{\partial z}\right|(R^2 - \rho^2) \\ &= \frac{\pi}{2\nu}\left|\frac{\partial p}{\partial z}\right| \int_0^R d\rho\, (\rho\, R - \rho^3) = \frac{\pi}{8\nu}\left|\frac{\partial p}{\partial z}\right| R^4 = \pi R^2\, \overline{v_z} n \end{aligned}$$

Izraz za $Q$ su empirijski pronašli Hagen i Poiseuille, a teoriski ga je izveo G.G. Stokes.

Prosječna brzina tekućine u cijevi je: $$\overline{v_z} = \frac{1}{8\eta}\left|\frac{\partial p}{\partial z}\right| R^2$$

# Zakon sličnosti

Navier-Stokesova jednadžba je skup nelinearnih parcijalnih jednadžbi koje se mogu riješiti analitički samo u posebnim situacijama.

Postavlja se pitanje, ako je poznato rješenja za neku posebnu geometrijsku konfiguraciju tijela i područja u kojem je tekućina, je li moguće to riješenje primjeniti na ostale probleme koji su geometriski slični.

Čak i kada nije moguće jednadžbe rješiti, moguće je eksperimentalno odrediti aerodinamičke parametre nekog problema koristeći zračne tunele u kojima se simulira situacija koja nas zanima. Npr. želi se odrediti otpor na koji nailazi neki automobil gibajući se nekom bzrinom na autocesti. Jeli moguće taj otpor odrediti i na nekoj maloj maketi automobila (igrački) te dobivene rezultate naprosto uvećati na određeni mačin.

O ovim pitanjima govori zakon sličnosti.

# Zakon sličnosti

Pretpostavlja se da je problem moguće prikazati pomoću nekoliko karakterističnih veličina. Npr. ako se promatra problem opticanja tekućine oko tijela:

- Naka je $\ell$ karakteristična linearna dimezija tijela oko kojeg protiče tekućina (npr. radijus kugle).
- Naka je $u$ karakteristična brzina gibanja tekućine u odnosu na tijelo. To je brzina koju tećina ima na jako velikim udaljenostima od tijela.
- Viskoznost tekućine zadana je s $\nu = \frac{\eta}{\rho}$.
- Ako se promatra nestacionarno gibanje, onda neka je $\tau$ karakteristično vrijeme koje odgovara vremenskoj promjeni.
- Pretpostavit će se da je tekućina nestlačiva: $\rho$=konst.

Treba odrediti brzinu tekućine $\vec{v}$ i tlak $p$.

# Zakon sličnosti

Fizikalne veličine u NS jednadžbi mogu se prikazat preko bezdimenzionalnih parametara:

$$\begin{aligned}
x &\rightarrow \bar{x}\,\ell \\
y &\rightarrow \bar{y}\,\ell \\
z &\rightarrow \bar{z}\,\ell \\
t &\rightarrow \bar{t}\,\tau \\
v_x &\rightarrow \overline{v_x}\,u \\
v_y &\rightarrow \overline{v_y}\,u \\
v_z &\rightarrow \overline{v_z}\,u \\
p &\rightarrow \bar{p}\,\rho\,u^2
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u stacionarnu NS jednadžbu dobiva se:

$$\left(\frac{\vec{v}}{u} \cdot \ell\,\vec{\nabla}\right)\frac{\vec{v}}{u} = (\ell\,\vec{\nabla})\left(\frac{p}{\rho u^2}\right) + \underbrace{\frac{\nu}{u\,\ell}}_{\equiv \frac{1}{\mathcal{R}}}\ \ell^2 \Delta \frac{\vec{v}}{u}$$

# Zakon sličnosti

Dobivena jednadžba sadrži sve bezdimenzionalne veličine (prostorne koordinate, tlak, brzinu, ...) te još jednu bezdimenzionalnu veličinu koja u sebi sve karakteristične skale koje su specifične određenom problemu.

Rješenje jednadžbe može se zapisati kao:

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= u\,\vec{f}(\frac{\vec{r}}{\ell}, \mathcal{R}) \\
p &= \rho\, u^2\, g(\frac{\vec{r}}{\ell}, \mathcal{R})
\end{aligned}
$$

gdje je:

$$\mathcal{R} = \frac{u\,\ell}{\nu}$$

koja je poznata kao **Reynoldsov broj**. Idealna tekućina ima beskonačno veliki Reynoldsov broj, dok je kod jako viskozne tekućine Reynoldsov broj mali.

# Zakon sličnosti

Iz jednadžbe se može izračunati sila otpora, koja se može također prikazati pomoću bezdimenzionalnih veličina:

$$F = \rho\, u^2\, \ell^2\, h(\mathcal{R})$$

Nepoznate funkcije $\vec{f}$, $g$ i $h$ treba odrediti rješavanjem bezdimenzionalne Navier-Stockesove jednadžbe. Dobiveno rješenje međutim nije specifično za samo jedan jedini problem, nego odgovara cijeloj klasi različitih rješenja koja sva imaju isti Reynoldsov broj.

# Zakon sličnosti

Složena verzija NS jednadžbe sadrži vremensku ovisnost te vanjske sile kao što je gravitacijska sila. Svođenje kompletne NS jednažbe na bezdimenzionalne veličine dobiva se jednadžba:

$$\underbrace{\frac{\ell}{\tau u}}_{\equiv \frac{1}{\mathcal{S}}} \tau \frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{v}}{u} + \left(\frac{\vec{v}}{u} \cdot \ell\, \vec{\nabla}\right) \frac{\vec{v}}{u} = (\ell\, \vec{\nabla}) \left(\frac{p}{\rho u^2}\right) + \frac{1}{\mathcal{R}}\, \ell^2 \Delta \frac{\vec{v}}{u} + \underbrace{\frac{\ell g}{u^2}}_{\equiv \frac{1}{\mathcal{F}}} \frac{\vec{g}}{g}$$

koja u sebi sadrži dva dodatna bezimenzionalna parametra:

- $\mathcal{S}$ je **Strouhalov broj** pojavljuje se u nestacionarnim problemima.
- $\mathcal{F}$ je **Froudeov broj** pojavljuje se u problemima s gravitacijskim poljem.

# Zakon sličnosti

Rješenje jednadžbe može se zapisati kao:

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= \quad u \;\; \vec{f}\left(\frac{\vec{r}}{\ell}, \frac{t}{\tau}, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{F}\right) \\
p &= \rho\, u^2\, g\left(\frac{\vec{r}}{\ell}, \frac{t}{\tau}, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{F}\right)
\end{aligned}
$$

Npr. ako se promatra periodično gibanje period će biti funkcija oblika:

$$T = \frac{\ell}{u}\, h(\mathcal{R}, \mathcal{F})$$

# Opticanje kugle u viskoznoj tekućini

Problem se može rješavati u inercijalnom sustavu u kojem kugla miruje, a tekućina se giba, ili u sustavu u kojem tekućina u beskonačnosti miruje, a kugla se giba:

$\boxed{\textbf{sustav tekućine}}$

brzina gibanja tekućine:

$$\vec{v}(\vec{r})$$

$\boxed{\textbf{sustav kugle}}$

brzina gibanja tekućine:

$$\vec{V}(\vec{r})$$

$$\vec{v}(\vec{r}) = [\,\vec{V}(\vec{r}) - \vec{u}\,] \xrightarrow{\vec{r}\to\infty} 0$$

U sustavu kugle, $\vec{u}$ je brzina gibanja tekućine u beskonačnosti (brzina opticanja).

Radit ćemo u sustavu u kojem tekućina miruje u beskonačnosti.

# Opticanje kugle u viskoznoj tekućini

- U slučaju viskozne tekućine, Reynoldsov broj je mali što znači da nelinearni član NS jednadžbe je zanemariv naspram člana s viskoznošću:
$$|(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}| \ll \nu\,|\Delta\vec{v}|$$
- Ako je tekućina nestlačiva, onda je
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v} = \text{rotacija nekog vektora.}$$
Neka je:
$$\vec{v} = \vec{\nabla}\times\vec{A}.$$
- Brzina je **polarni** vektor:
$$\vec{v}(\vec{r}\to-\vec{r}) = -\vec{v}$$
Radi se o operaciji prostorne inverzije. Svojstvo vektora na transformaciju zove se **paritet**.

# Opticanje kugle u viskoznoj tekućini

- Vektor $\vec{A}$ je aksijalni vektor:

$$\vec{A}(\vec{r} \to -\vec{r}) = \vec{A}$$

  (Napomena: električno polje je polarni vektor, magnetsko polje je aksijalni).

- Vektor $\vec{A}$ treba biti linearno proporcionalan vektoru $\vec{u}$. Ako je ako je $\vec{u} = 0$, onda su sve brzine jednake nuli. Također, promjena predznaka vektora $\vec{u}$ mijenja predznak svih brzina, pa tako i vektora $\vec{A}$.

Dakle:

1. $\vec{A}$ je aksijalan.
2. $\vec{A} \sim \vec{u}$.
3. $\vec{A} \xrightarrow{\vec{r} \to \infty}$ konstanta

Pogađamo da vektor $\vec{A}$ mora imati ovaj oblik, koji zadovoljava sve navedene zahtijeve:

$$\vec{A} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{u} \right)$$

i gdje još za nepoznatu funkciju, $f(r)$, vrijedi:

$$\frac{\partial f}{\partial r} \xrightarrow{r \to \infty} \text{konstanta}$$

(napomena: $f(r)$ je funkcija iznosa radijus vektora).

# Opticanje kugle u viskoznoj tekućini

- Vektor $\vec{A}$:

$$\vec{A} = -\vec{u} \times \vec{\nabla} f(r) = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \;\; f(r)) \, .$$

- a brzina:

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \left( \vec{\nabla} \times (\vec{u} \;\; f(r)) \right)$$

Navier-Stokesova jednadžba za slučaj opticanja glasi:

$$\underbrace{\rho \, (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}_{\text{zanemarije se}} \quad = -\vec{\nabla} p + \eta \, \Delta \vec{v}.$$

Primjenom rotacije, eliminira se gradijent tlaka, pa izlazi:

$$\vec{\nabla} \times \Delta \vec{v} = 0,$$

odnosno:

$$\Delta (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0.$$

# Opticanje kugle u viskoznoj tekućini

Uvrštavanjem izraza za brzinu u Navier-Stokesovu jednadžbu dobiva se jdnadžba koju je potrebno riješiti.

Odredimo prvo rotaciju brzine:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{v} &= \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times (\vec{u}\ \ f(r))\right)\right) \\ &= \left(\underbrace{\mathrm{grad}\,\mathrm{div}}_{=0} - \Delta\right) \left(\vec{\nabla} \times (\vec{u}\ \ f(r))\right)\end{aligned}$$

Slijedi da Navier-Stokesova jednadžbu glasi:

$$\Delta^2 \left(\vec{\nabla} \times (\vec{u}\ \ f(r))\right) = 0.$$

## Opticanje kugle u viskoznoj tekućini

Nadalje,

$$\begin{aligned}\Delta^2 \left(\vec{\nabla} \times (\vec{u}\;\; f(r))\right) &= \vec{\nabla} \times (\vec{u}\; \Delta^2 f(r)) \\ &= -\vec{u} \times \left(\vec{\nabla}\, \Delta^2 f(r)\right) = 0.\end{aligned}$$

Dakle:

$$\vec{\nabla}\, \Delta^2 f(r) = \Delta^2 (\vec{\nabla} f) = 0.$$

Integriranjem slijedi:

$$\Delta^2 f(r) = \text{konstanta}.$$

Imajući u vidu uvjet:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \text{konstanta} \quad \Rightarrow \quad \Delta^2 f(r) = 0.$$

# Opticanje kugle u viskoznoj tekućini

Kako je $f$ funkcija samo iznosa radijus vektora, $r$, tada je:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right).$$

Integrirajući jednadžbu:

$$\Delta^2 f = 0,$$

slijedi:

$$\Delta f = \frac{2a}{r} + c$$

gdje su $a$ i $c$ konstante integracije (sferno simetrični članovi u multipolnom razvoju funkcije koja zadovoljava Laplaceovu jednadžbu).

Iz rubnog uvjeta na funkciju $f$ izlazi da je $c = 0$. Dakle:

$$\Delta f = \frac{2a}{r}.$$

# Opticanje kugle u viskoznoj tekućini

Daljnom integracijom jednadžbe:

$$\Delta f = \frac{2a}{r}.$$

Slijedi da je:

$$f(r) = a\,r + \frac{b}{r}$$

Konstante integracije, $a$ i $b$ se trebaju izračunati iz rubnih uvjeta na brzinu. Koristeći izraz za brzinu:

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \times \left( \vec{\nabla} \times (\vec{u}\;\; f(r)) \right)$$

nalazimo da je:

$$\vec{v} = -a\,\frac{\vec{u} + \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{u})}{r} + b\,\frac{-\vec{u} + 3\,\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{u})}{r^3}$$

gdje je:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} \qquad \text{jedinični radijus vektor.}$$

# Opticanje kugle u viskoznoj tekućini

Granični uvjet na brzinu na površini kugle i u sustavu u kojem kugla miruje, glasi:

$$\vec{V}(\vec{r} = \vec{R}) = \vec{u} + \vec{v}(\vec{r} = \vec{R}) = 0,$$

odnosno

$$\vec{u}\underbrace{\left(1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3}\right)}_{=0} + \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{u})\underbrace{\left(-\frac{a}{R} + 3\frac{b}{R^3}\right)}_{=0} = 0.$$

To je sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznate veličine, $a$ i $b$. Njegovim rješavanjem dobiva se:

$$\begin{aligned} a &= \frac{3R}{4} \\ b &= \frac{R^3}{4}. \end{aligned}$$

# Opticanje kugle u viskoznoj tekućini

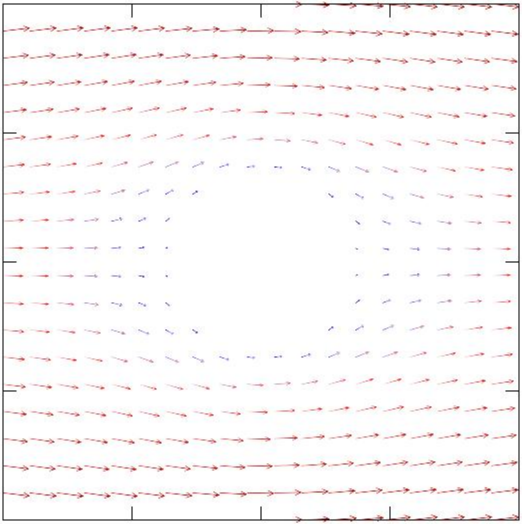
Konačni izraz za brzinu tekućine u sustavu u kojem kugla miruje glasi:

$$\vec{V} = \vec{u} - \frac{3R}{4}\,\frac{\vec{u} + \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{u})}{r} - \frac{R^3}{4}\,\frac{\vec{u} - 3\,\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{u})}{r^3}$$

U sfernom koordinatnom sustavu:

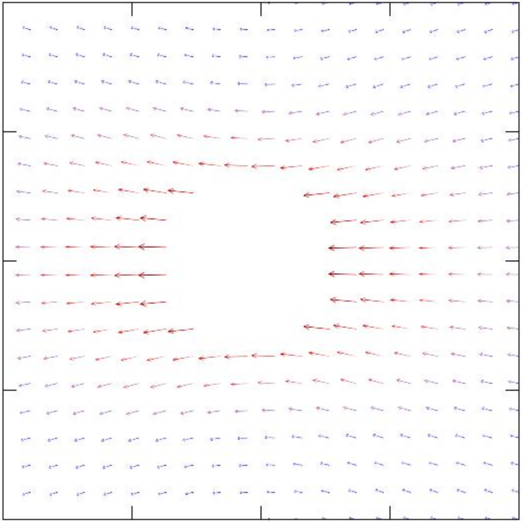
$$\begin{aligned} V_r &= u\cos\theta\left[1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right] \\ V_\theta &= -u\sin\theta\left[1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right] \end{aligned}$$

# Opticanje kugle u viskoznoj tekućini



Sustav nepomične kugle

# Opticanje kugle u viskoznoj tekućini



Sustav nepomične tekućine

# Opticanje kugle u viskoznoj tekućini

Distribucija tlaka u tekućini može se izračunati iz Navier-Stokesova jednadžbe:

$$\vec{\nabla} p = \eta\, \Delta \vec{v}.$$

Uvrštavajući izraz za brzinu:

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \times \left( \vec{\nabla} \times (\vec{u}\;\, f(r)) \right)$$

dobiva se da je:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v} &= \Delta \vec{\nabla} \times \left( \vec{\nabla} \times (\vec{u}\;\, f(r)) \right) \\ &= \Delta \left[ \text{grad div} \, (\vec{u} f) - \vec{u} \Delta f \right] \\ &= \vec{\nabla} \left[ \Delta \vec{\nabla} \, (f \vec{u}) \right] = \vec{\nabla} \left[ \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \, (\Delta f) \right] \end{aligned}$$

# Opticanje kugle u viskoznoj tekućini

Dakle:

$$\vec{\nabla} p = \eta \, \vec{\nabla} \left[ \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \, (\Delta f) \right]$$

Odavde isčitavamo da je:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \eta \, \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \, (\Delta f) \\ &= p_0 - \frac{3R}{2} \, \eta \, \frac{(\vec{u} \cdot \vec{n})}{r^2} . \end{aligned}$$

$p_0$ je tlak tekućine u beskonačnosti.

Koristeći izraze za brzinu i tlak može se izračunati sila kojom tekućina djeluje na kuglu. Treba imati na umu da ukupna sila nije samo djelovanje tlaka, jer tekućina, kroz viskozno trenje djeluje tangencijalno na površinu kugle. Sila po jedinici površine opisana je tenzorom naprezanja.

# Opticanje kugle u viskoznoj tekućini

Tenzor naprezanja je:

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \sigma'_{ij},$$

gdje je:

$$\sigma'_{ij} = \eta \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij} \underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})}_{=0} \right] + \zeta\,\delta_{ij}\,\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})}_{=0}.$$

Ukupna sila se može izračunati integracijom preko cijele površine:

$$F_i = \int_S dS \sum_k n_k (p\,\delta_{ik} - \sigma'_{ik})$$

Komponenta sile u smijeru vektora $\vec{u}$ (sila otpora):

$$F = \int_S dS \left[ -p\cos\theta + \cos\theta\,\sigma'_{rr} - \sin\theta\,\sigma'_{r\theta} \right]$$

# Opticanje kugle u viskoznoj tekućini

Koristeći izraze za tenzor napretanja u sfernom koordinatnom sustavu:

$$\begin{aligned} \sigma'_{rr} &= 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ \sigma'_{r\theta} &= \eta \left( \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \end{aligned}$$

te izraze za brzinu tekućine, dobiva se da je:

$$\begin{aligned} \sigma'_{rr} &= 0 \\ \sigma'_{r\theta} &= -\frac{3\eta}{2R} u \sin\theta \end{aligned}$$

Tako da je sila otpora:

$$\begin{aligned} F &= \int_S dS \left[ -\cos\theta \left( p_0 - \frac{3R}{2}\,\eta\, \frac{u\cos\theta}{R^2} \right) - \sin\theta \left( -\frac{3\eta}{2R} u \sin\theta \right) \right] \\ &= \frac{3\eta u}{2R} 4\pi R^2 = 6\pi\eta u R. \end{aligned}$$

# Opticanje kugle u viskoznoj tekućini

$$F = 6\pi\eta\, u\, R \qquad \text{(Stokes-ova formula)}$$

Sila otpora linearno je proporcionalna brzini i dimenziji tijela.

Do sličnog zaključka se je moglo doći iz dimenzionalne analize. Iz zakona sličnosti izlazi da je:

$$F = \rho\, u^2\, \ell^2\, h(\mathcal{R}) \sim \rho\, u^2\, \ell^2\, \frac{1}{\mathcal{R}} = \rho\, u^2\, \ell^2\, \frac{\nu}{u\,\ell} = \eta\, u\, R.$$

gdje je $\ell = R$ prostorna dimenzija tijela.

Do sličnog izraza bi došli i promatrajući opticanje konačnog tijela proizvoljnih dimenzija. Sila kojom tekućina djeluje na tijelo je oblika:

$$F_i = \eta \sum_k a_{ik}\, u_k,$$

gdje je $a_{ik}$ simetrični tenzor koji ne zavisi od brzine, nego samo o obliku tijela.

# Poboljšanje Stokes-ove formule

Dobiveni izraz za brzinu tekućine nije dobar na velikim udeljenostima od tijela, čak i kada je Reynoldsov broj mali. U tom dijelu prostora nelinearni član, koji je zanemaren, reda je veličine:

$$\rho(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} \sim \rho\, u\, \frac{u\, R}{r^2} = \rho\, \frac{u^2\, R}{r^2}$$

Dok član koji je zadržan, je reda veličine:

$$\eta\Delta\vec{v} \sim \eta\, \frac{uR}{r^3}.$$

Prvi je član moguće zanemariti naspram drugog samo ako je:

$$\rho\, \frac{u^2\, R}{r^2} \ll \eta\, \frac{uR}{r^3} \qquad \Rightarrow \qquad r \ll \frac{\nu}{u}.$$

Na većim je udaljenostima ($> \nu/u$) dobiveni izraz pogrešan.

# Poboljšanje Stokes-ove formule

Brzine fluida na većim udaljenostima mogu se točnije odrediti ako se prvi član u Navier-Stokesovoj jednadžbi aproksimira kao:

$$\rho(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} \approx \rho(\vec{u}\vec{\nabla})\vec{v},$$

odnosno, cijela jednadžba je:

$$(\vec{u}\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\Delta\vec{v} \qquad \text{(C.W. Oseen 1910)}$$

Kao rezultat dobiva se da je sila otpora kugle:

$$F = 6\pi\eta u R\left(1 + \frac{3uR}{8\nu}\right)$$