

Uporaba konformnog preslikavanja u problemima strujanja idealne tekućine

« Hidrodinamika »

Ivo Batistić

Fizički odsjek, PMF
Sveučilište u Zagrebu

predavanja 2008

Pregled predavanja

Osnovni pojmovi

Primjeri linearnog preslikavanja

Primjer potencije: $n = \frac{3}{2}$

Primjer potencije: $n = 2$

Primjer potencije: $n = \frac{1}{2}$

Primjer eksponencijalna funkcija

Möbiusovo preslikavanje

Swartz-Christoffelovo preslikavanje

Primjeri iz zadaća

Preslikavanje Zhukovskog

Zadatak 1. - primjer

Konformnim preslikavanjem se smatra takva transformacija prostornih koordinata koja čuva kuteve. Analitičke funkcije kompleksne varijable predstavljaju vrstu konformnog preslikavanja između jednog dijela kompleksne ravnine u neki drugi dio kompleksne ravnine koji može imati sasvim drugi oblik.

Konformno se preslikavanje smatra moćnim alatom u mehanici tekućina jer je moguće složeno područje u kojem se tekućina giba preslikati u jednostavno u kojem je rješenje poznato.

Za koordinate položaja u originalnom problemu može se koristiti oznaka:

$$z = x + i y$$

odnosno za kompleksni potencijal:

$$u(z) = \phi(x, y) + i \psi(x, y).$$

Osnovni pojmovi

Koordinate u novom preslikanom području označimo s:

$$w = r + i q.$$

Između varijable w i z postoji jednoznačna funkcionalna veza:

$$w = f(z) \quad \text{ili} \quad z = g(w),$$

(osim za neke izolirane singularne točke u z - ili w -ravnini).

Neka je poznato rješenje stujanja tekućine u w -ravnini, tj. poznat je potencijal iz kojeg se mogu izračunati brzine deriviranjem po w :

$$u_w(w),$$

onda je potencijal u z -ravnini:

$$u(z) = u_w(f(z)),$$

pri čemu je brzina čestica tekućine jednaka:

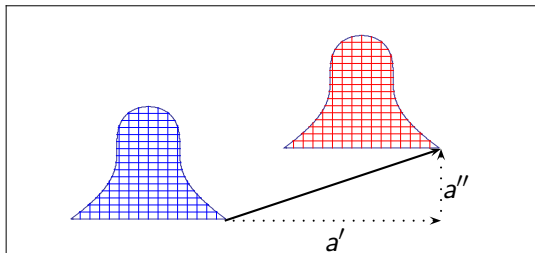
$$v_x - i v_y = \frac{du}{dz} = \frac{du_w}{dw} \frac{dw}{dz}$$

Primjeri - Translacija

Najjednostavnije konformno preslikavanje je translacija:

$$w = z + a,$$

gdje je a neki kompleksni broj:



Slika: Translacija.

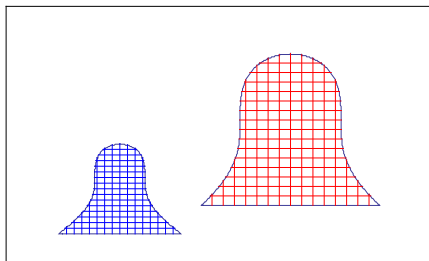
Svaka točka u kompleksnoj ravni preslikava se u novu točku pomaknutu za kompleksni broj a .

Primjeri - Translacija i rastezanje

Nešto složenije konformno preslikavanje je translacija kombinirana s rastezanjem

$$w = b z + a,$$

gdje je a kompleksni broj, a b je neki realni broj ($\neq 0$).



Slika: Translacija i rastezanje.

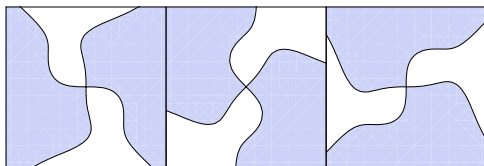
Svi preslikani brojevi povećani su ili umanjeni za isti faktor b te su još i pomaknuti za isti kompleksni broj a .

Primjeri - Rotacija

Množenjem kompleksnog broja:

$$w = e^{i\varphi} z$$

dobiva se rotacija kompleksne ravnine za kut φ .

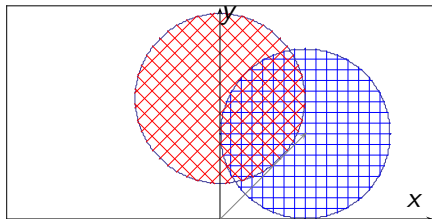


Slika: Rotacija.

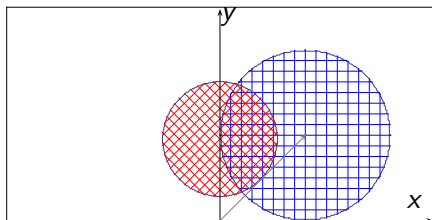
Slika u sredini dobivena je množenjem kompleksnih brojeva iz lijeve slike za faktor $e^{i\pi/4}$. Slika na desnoj strani se dobiva iz one lijeve množeći za faktor $e^{i\pi/2} = i$.

Preslikani kompleksni brojevi imaju dodatnu fazu uvećanu za kut φ .

Primjeri - Rotacija



Slika: Rotacija za kut $\pi/4$: $w = e^{i\pi/4} z$.



Slika: Rotacija i rastezanje:
 $w = e^{-\pi/8 + i\pi/4} z$.

Općenito množenje s proizvoljnim kompleksnim brojem, a , predstavlja istovremeno i rotaciju i rastezanje:

$$w = a z = |a| e^{i\varphi} z.$$

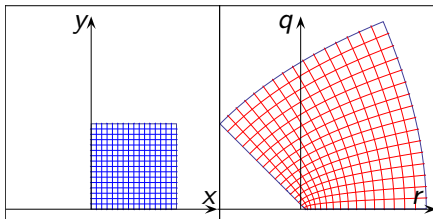
Samo rotacija se dobiva ako je $|a| = 1$.

Primjeri - potencija: $n = \frac{3}{2}$

Jednostavne linearne transformacije kao što je translacija ili rotacija uz rastezanje ($w = bz + a$) čuvaju oblik područja koje preslikavaju, iako ne i veličinu.

Nelinearne transformacije mijenjaju oblik područja koje preslikavaju. Ipak dva pravce koji se pod nekim kutem sijeku, i u transformiranom području će se sjeći pod istim kutem. Pogledajmo primjer promjene oblika kvadrata za konformno preslikavanje:

$$w = z^{\frac{3}{2}}$$



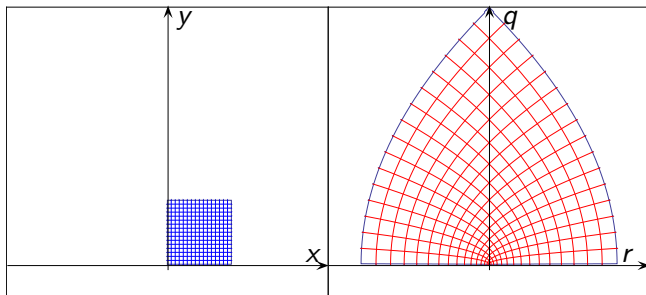
Slika: Konformno preslikavanje: $w = r + iq = z^{\frac{3}{2}} = (x + iy)^{\frac{3}{2}}$

Primjeri - potencija: $n = 2$

Konformno preslikavanje:

$$w = z^2.$$

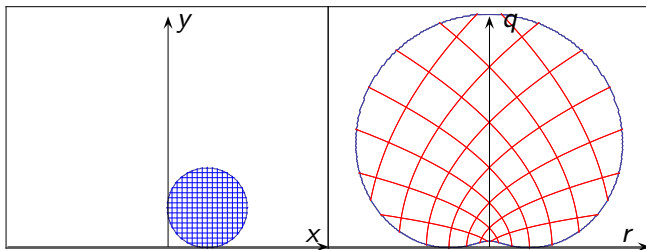
Prvi kvadrant se preslikava u prvi i drugi kvadrant. Pozitivni dio imaginarne osi prelazi u negativni dio realne osi. Lijeva i donja stranica kvadrata s izravnavaju i postaju realna os u kompleksnoj ravnini w .



Slika: Konformno preslikavanje: $w = r + iq = z^2 = (x + iy)^2$

Primjeri - potencija: $n = 2$

Npr. kružna površina iz prvog kvadranta pretvara se u lepezu.



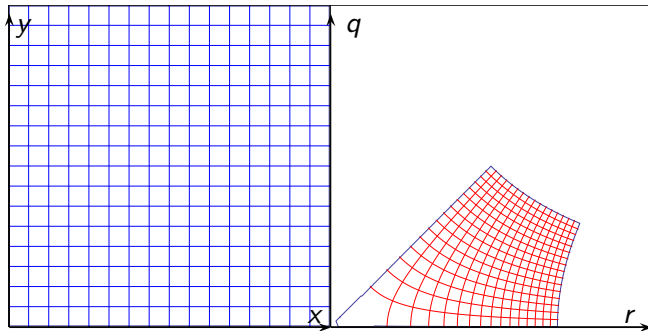
Slika: Konformno preslikavanje: $w = r + iq = z^2 = (x + iy)^2$

Primjeri - potencija: $n = \frac{1}{2}$

Kod konformnog preslikavanja:

$$w = z^{\frac{1}{2}}$$

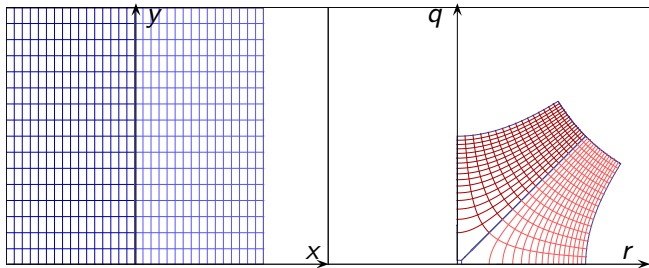
lijeva stranica kvadrata u prvom kvadrantu naginje se pod kutem od 45° u kompleksnoj w -ravnini.



Slika: Konformno preslikavanje: $w = r + iq = z^{\frac{1}{2}} = (x + iy)^{\frac{1}{2}}$

Primjeri - potencija: $n = \frac{1}{2}$

Kvadrat koji je protegnut simetrično oko y osi preslikava se u prvi kvadrant. Ispod linije $q = r$ nalaze se točke $x > 0$ a iznad linije $q = r$ su točke $x < 0$.



Slika: Konformno preslikavanje: $w = r + iq = z^{\frac{1}{2}} = (x + iy)^{\frac{1}{2}}$

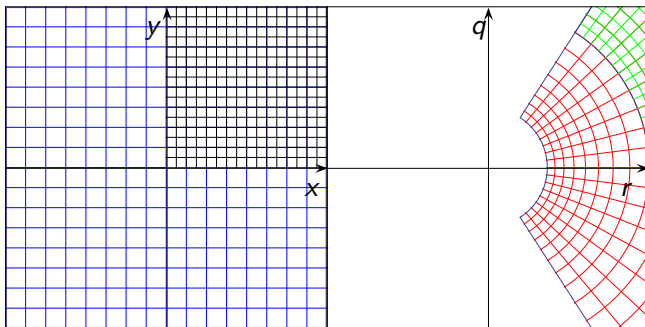
Negativna strana realne osi postaje pozitivna strana imaginarne osi, a imaginarna os postaje pravac $q = r$ u kompleksnoj w -ravnini.

Primjeri eksponencijalna funkcija

Eksponencijalna funkcija:

$$w = e^z$$

preslikava kvadrat iz z ravnine u kružni odsječak u w ravlini:



Slika: Konformno preslikavanje: $w = e^z$

Möbiusovo preslikavanje

Preslikavanje oblika:

$$w = \frac{a z + b}{c z + d}$$

poznato je kao Möbiusova transformacija. Pri tome kompleksni brojevi a , b , c i d moraju zadovoljavati uvjet:

$$a d \neq b c.$$

Pomoću njega moguće je preslikati gornji dio kompleksne ravnine, $y > 0$ u kružni disk, i obrnuto.

Swartz-Christoffelovo preslikavanje

Pomoću Swartz-Christoffelovog preslikavanja moguće je preslikati gornji dio kompleksne ravnine na proizvoljni poligon.

Naka su kutevi koje zatvaraju stranice poligona redom:

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots,$$

te neka se vrhovi poligona preslikavaju u točke na realnoj osi s oznakama:

$$a, b, c, d, \dots \quad (\text{realni brojevi}).$$

Tada je funkcija preslikavanja dana integralom:

$$w = konst \int^z dx (x-a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1} (x-b)^{\frac{\beta}{\pi}-1} (x-c)^{\frac{\gamma}{\pi}-1} (x-d)^{\frac{\delta}{\pi}-1} \dots$$

Neke od točaka poligona mogu biti (težiti) u ∞ , pri čemu pripadni eksponent u integralu teži k nuli. Tako da beskonačno daleka točka u podintegralnoj funkciji se pojavljuje kao multiplikativna konstanta.

Swartz-Christoffelovo preslikavanje - primjer

Prema Swartz-Christoffelovoj formuli:

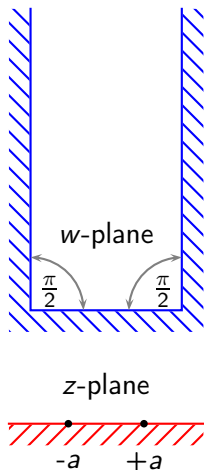
$$\frac{dw}{dz} = \frac{\textit{konst}}{(z+a)^{1/2}(z-a)^{1/2}} = \frac{\textit{konst}}{\sqrt{z^2 - a^2}}$$

Integral je:

$$w(z) \sim i \arcsin\left(\frac{z}{a}\right) + \textit{konst}$$

Nepoznata aditivna i multiplikativna konstanta mogu se izabrati tako da da točke u z -ravnini $x = \pm a$ odgovaraju točkama $r = \pm \frac{\pi}{2}$ u w -ravnini. Na taj način dobiva da je funkcija preslikavanja:

$$w(z) = \arcsin\left(\frac{z}{a}\right)$$

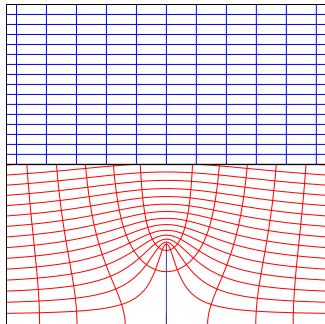


Primjena Swartz-Christoffelove formule na primjerima sa zadaća

Konformno preslikavanje

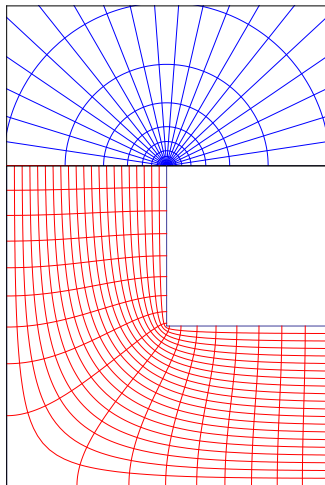
$$w = \sqrt{z^2 - 1}$$

dobiva se kao granični slučaj **beskonačnog** poligona koji na realnoj osi ima istokračni trokut kojemu donja stranica postaje sve manja i manja. Ono opisuje preslikavanje između gornje kompleksne ravnine i gornje kompleksne ravnine kojoj nedostaje spoj-nica između točaka $z = 0$ i $z = i$.



Slika: Konformno preslikavanje:
 $w = \sqrt{z^2 - 1}$

Primjena Swartz-Christoffelove formule na primjerima sa zadaća



Slika: Konformno preslikavanje između izvora u gornjoj poluravnini i kanala pod kutem.

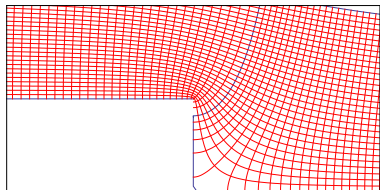
Gornja poluravnina može se preslikati u kanal pod kutem koristeći:

$$w = \frac{1}{\pi} \left(\arcsin z + i \arcsin \frac{1}{z} \right) + \frac{1+i}{2}$$

Primjena Swartz-Christoffelove formule na primjerima sa zadaća

Gornja poluravnina preslikava se u područje sa stepenicom pomoću formule:

$$w = \frac{1}{\pi} \left(\pm \sqrt{z^2 - 1} + \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1}) \right)$$



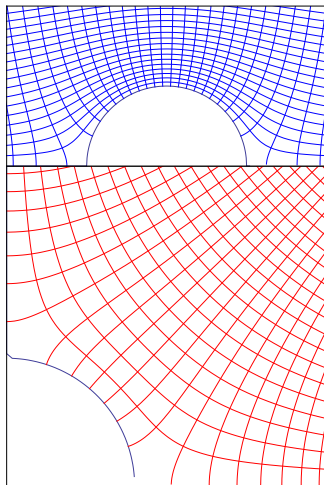
Slika: Konformno preslikavanje

Izraz se dobiva kao rezultat integracije:

$$\frac{dw}{dz} = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$$

Multiplikativna i aditivna konstanta izabrane su tako da se točke $z = \pm 1$ preslikavaju u točke $w = 0$ i $w = -i$.

Ostali primjeri sa zadaća



Slika: Konformno preslikavanje:

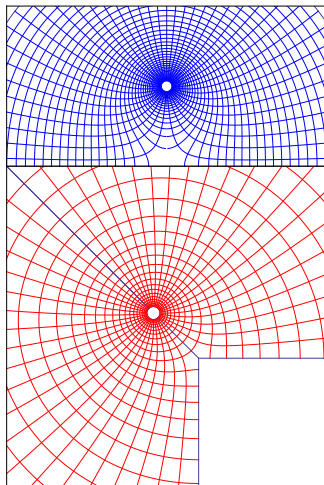
$$w = \sqrt{z}$$

Problem opticanja cilindra u prvom kvadrantu dobiva se korjenjskim preslikavanjem:

$$w = \sqrt{z}$$

iz problema opticanja oko cilindra, ili opticanja polucilindra u kompleksnoj poluravnini $y > 0$.

Ostali primjeri sa zadaća



Slika: Konformno preslikavanje:

$$w = z^{\frac{3}{2}}$$

Problem izvora koji se nalazi na nekoj udaljenosti od poluravnine, može se preslikati u problem izvora ispred kuta koji zatvara četvrti kvadrant koristeći preslikavanje:

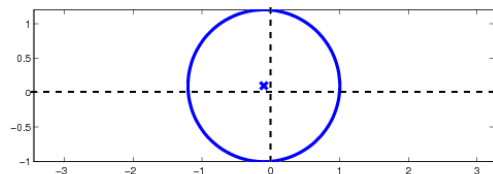
$$w = z^{\frac{3}{2}}$$

Preslikavanje Zhukovskog

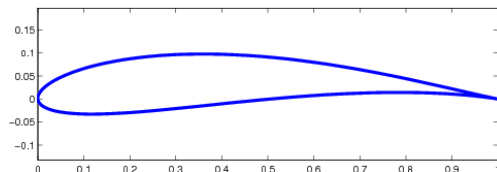
Preslikavanje oblika:

$$w = z + \frac{1}{z}$$

poznato je kao transformacija Zhukovskog (ili Joukowski). Pomoći nje je moguće preslikati opticanje cilindra u opticanje tankog krila prigodnim izborom ishodišta cilindra.

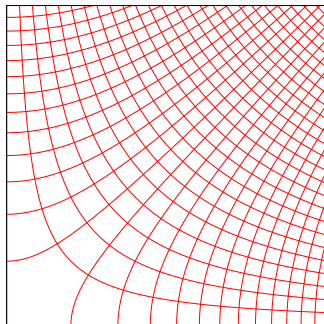


Slika: Preslikavanje Zhukovskog.



Zadatak 1. - primjer

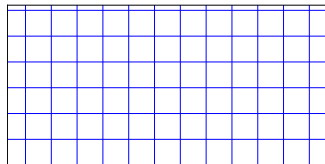
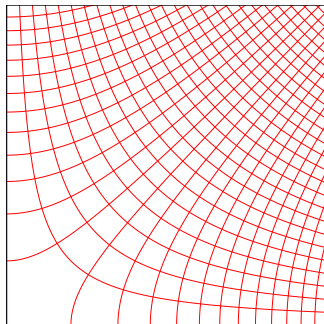
Idealna 2D nestlačiva tekućina se giba u dijelu prostora $x, y > 0$ (1. kvadrant) dolazeći iz $y = +\infty$ prema ishodištu i udaljavajući se prema $x = +\infty$. Odrediti brzinu tekućine na pravcu $x = 0, y > 0$.



Zadatak 1. - primjer

Između 1. kvadranta i gornje poluravnine postoji konformno preslikavanje:

$$\begin{aligned} z^2 = (x + iy)^2 &= w = r + iq \\ z = x + iy &= \sqrt{w} = \sqrt{r + iq} \end{aligned}$$



Zadatak 1. - primjer

U kompleksnoj ravnini w , brzina tekućine je konstantna i paralelna x -osi. To znači da je:

$$\frac{du_w}{dw} = v_r - i \underbrace{v_q}_{=0} = v_0 = \textit{konst.}$$

Odnosno, integracijom se dobiva kompleksni potencijal:

$$u_w(w) = v_0 w$$

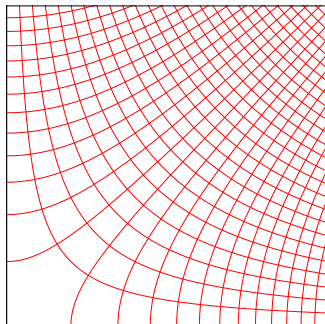
Tada je kompleksni potencijal u z -ravnini (1. kvadrant):

$$u(z) = u_w(w(z)) = v_0 w(z) = v_0 z^2$$

Brzina tekućine je:

$$\frac{du}{dz} = v_x - i v_y = 2 v_0 z = 2 v_0 (x + iy),$$

Zadatak 1. - primjer



Brzina tekućine

$$v_x(x, y) = +2 v_0 x$$

$$v_y(x, y) = -2 v_0 y$$

Rješenje zadatka:

$$v_x(x = 0, y > 0) = 0$$

$$v_y(x = 0, y > 0) = -2 v_0 y$$