IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - RJEŠENJA

JUNIORI

04. 03. 2016.

Zadatak 1. Označimo sa $[[x]]$ udaljenost realnog broja x od najbližeg cijelog broja. Izračunajte:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\!\left[(1+\sqrt{2})^n\right]\!\right]$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\!\left[n!e\right]\!\right]}{n!}$.

Rješenje.

(a) Iz binomne formule slijedi

$$(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n = 2\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2k} 2^k$$

pa je riječ o cijelom broju. Obzirom da je

$$|(1-\sqrt{2})^n| = (\sqrt{2}-1)^n \le \sqrt{2}-1 < \frac{1}{2},$$

vidimo

$$\left[\!\left[(1+\sqrt{2})^n\right]\!\right] = (\sqrt{2}-1)^n$$

pa preostaje sumirati geometrijski red:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2}-1)^n = \frac{\sqrt{2}-1}{1-(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(b) Iz poznatog Taylorovog razvoja funkcije e^x oko nule slijedi

$$n!e = n!\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!}.$$

Prvi pribrojnik je cijeli broj, dok drugi pribrojnik za $n \ge 3$ možemo ograničiti:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{j=n+1}^{k} j} \le \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k}$$
$$= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{2}{n+1} \le \frac{1}{2}.$$

Kako je još $2.5 < e < 2.75$ i $5 < 2e < 5.5$, zaključujemo

$$\left[\!\left[n!e\right]\!\right] = \begin{cases} 3-e & \text{za } n=1, \\ 2e-5 & \text{za } n=2, \\ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} & \text{za } n \ge 3. \end{cases}$$

Prema tome, tražena suma je jednaka

$$\frac{3-e}{1!} + \frac{2e-5}{2!} + \sum_{n=3}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{2} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{k-3}{k!}$$
$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} - 3\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{2} + \left(e - \frac{5}{2}\right) - 3\left(e - \frac{8}{3}\right) = 6-2e. \qquad \checkmark$$

Zadatak 2. Za svaki prirodni broj n dani su realni brojevi, $0 \leq a_n < b_n \leq 1$, takvi da je $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(b_n - a_n) > 2016$. Odredite najveći prirodan broj M takav da među skupovima $[a_n, b_n]$ sigurno postoji njih M čiji je presjek neprazan.

Rješenje. $M = 2017$. Uvedimo oznaku $A_n = [a_n, b_n]$. Pokažimo najprije da ih ne mora biti 2018 s nepraznim presjekom. Stavimo, npr.

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_{2017} = \left[0, \frac{2016 + \frac{1}{2}}{2017}\right],$$

$$A_{2017+n} = \left[\frac{2016 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{2n}}}{2017}, \frac{2016 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{2n+1}}}{2017}\right], \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

Prvih 2017 skupova je međusobno jednako, dok su svi ostali međusobno (i s prvih 2017) disjunktni, a očito je da je ispunjen uvjet $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(b_n - a_n) > 2016$. Dokažimo sada da ih u svakom slučaju mora biti 2017 s nepraznim presjekom. Za segment $I = [a, b]$ uvedimo oznaku $d(I) = b - a$. Uvjet zadatka je tada $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} d(A_n) > 2016$. Jasno je da postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $\sum\limits_{n=1}^{N} d(A_n) > 2016$. Kako je $d(A_n) \leq 1$, očito je $N \geq 2017$. Tvrdimo da među ovih N skupova sigurno postoji njih $M = 2017$ s nepraznim presjekom. Pretpostavimo suprotno, odnosno da je presjek bilo kojih 2017, među ovih N skupova, prazan. No, ovo sada znači da je svaka točka segmenta $[0, 1]$ pogođena najviše 2016 puta skupovima $A_1, A_2, \ldots, A_N$. Konačno, to znači da je ukupna duljina skupova $A_1, A_2, \ldots, A_N$ jednaka najviše $2016 \cdot d([0, 1]) = 2016$, što je kontradikcija. ✓

Zadatak 3. Neka je n prirodan broj i A antisimetrična $n \times n$ matrica s cjelobrojnim koeficijentima. Dokažite da je $\det A$ potpun kvadrat.

Rješenje. Najprije, ako je n neparan, onda iz

$$\det A = \det A^t = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A,$$

slijedi da je $\det A = 0$, što je potpun kvadrat.
Pretpostavimo dalje da je n paran broj. Koristiti ćemo sljedeću jednostavnu činjenicu:

$$\text{ako su } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \text{ takvi da je } \left(\frac{p}{q}\right)^2 \in \mathbb{Z}, \text{ onda je } \frac{p}{q} \in \mathbb{Z}.$$

Naime, sada vidimo da je dovoljno dokazati da svaka $n\times n$ antisimetrična matrica s racionalnim koeficijentima ima determinantu koja je kvadrat racionalnog broja. Tada za A znamo da je $\det A$ cijeli broj (pošto A ima cjelobrojne koeficijente) i da je kvadrat racionalnog broja pa onda po navedenoj činjenici slijedi da je $\det A$ potpun kvadrat. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n. Za $n = 2$ tvrdnja je očita. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki parni prirodni broj n i dokažimo ju za $n+2$. Označimo koeficijente matrice A s a_{ij}, i, $j \in \{1, 2, \ldots, n+2\}$. Kako je A antisimetrična, znamo da je $a_{ii} = 0$, za sve i. Ukoliko je $a_{1j} = 0$, za sve j, onda je $\det A = 0$ pa smo gotovi. Pretpostavimo da je $a_{1k} \neq 0$ za neki $k \in \{2, 3, \ldots, n+2\}$. Svakom stupcu $j \neq k$ matrice A dodajmo stupac k pomnožen s $-\dfrac{a_{1j}}{a_{1k}}$, zatim svakom retku $i \neq k$ matrice A dodajmo redak k pomnožen s $-\dfrac{a_{i1}}{a_{k1}}$. Promotrimo ovako dobivenu matricu te iz nje izbacimo redak i stupac 1 te redak i stupac k, označimo tu $n \times n$ matricu s B. Napravimo Laplaceov razvoj najprije po prvom retku, a onda po prvom stupcu (na taj način upravo izbacimo navedene stupce i retke i ostane nam matrica B), tada dobijemo:

$$\det A = (-1)^{1+k} \cdot a_{1k} \cdot (-1)^{k-1+1} \cdot a_{k1} \cdot \det B = a_{1k}^2 \cdot \det B.$$

Matrica B ima racionalne koeficijente, za korak indukcije preostaje nam još dokazati da je B antisimetrična i gotovi smo. Označimo koeficijente matrice B s b_{ij}, i, $j \in \{1, 2, \ldots n+2\}$, gdje je $\{i, j\} \cap \{1, k\} = \emptyset$. Računamo:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{1k}} \cdot a_{ik} - \frac{a_{i1}}{a_{k1}} \cdot \left(a_{kj} - \frac{a_{1j}}{a_{1k}} \cdot a_{kk}\right) \\ &= -\left(a_{ji} - \frac{a_{j1}}{a_{k1}} \cdot a_{ki} - \frac{a_{1i}}{a_{1k}} \cdot a_{jk}\right) \\ &= -\left[a_{ji} - \frac{a_{1i}}{a_{1k}} \cdot a_{jk} - \frac{a_{j1}}{a_{k1}} \cdot \left(a_{ki} - \frac{a_{1i}}{a_{1k}} \cdot a_{kk}\right)\right] \\ &= -b_{ji}. \end{aligned}$$

Dakle, matrica B je antisimetrična i time je naš dokaz priveden kraju. ✓

Zadatak 4. Aco se sprema na posjet Apsurdistanu i primijetio je sljedeće:

1. Apsurdistan se sastoji od 1024 grada, čija su imena brojevi od 0 do 1023,
2. Gradovi m i n su povezani cestom ako i samo ako se binarni zapisi brojeva m i n razlikuju u točno jednoj znamenci,
3. U vremenu kada Aco planira svoj posjet u Apsurdistanu će biti zatvoreno 8 cesta radi održavanja.

Dokažite da Aco može isplanirati put Apsurdistanom takav da putuje cestama koje rade, svaki grad posjeti točno jednom i da se na kraju vrati u grad iz kojega je krenuo.

Rješenje. Primijetimo da je n-dimenzionalna binarna kocka zapravo graf čiji su vrhovi označeni binarnim n-torkama, a dva vrha su povezana ako i samo ako se njihove oznake razlikuju na točno jednoj koordinati. Dakle, naš problem je zapravo: *Dokažite da ako iz* 10*-dimenzionalne binarne kocke uklonimo bilo kojih 8 bridova, tako dobiveni graf je uvijek Hamiltonov, tj. u njemu postoji zatvoreni put (počinje i završava u istom vrhu) koji svakim vrhom prolazi točno jednom (Hamiltonov ciklus).*

Indukcijom po n dokažimo općenitiju tvrdnju: *Ako iz n-dimenzionalne* $(n > 1)$ *binarne kocke uklonimo bilo kojih* $(n-2)$ *bridova, dobit ćemo Hamiltonov graf.*

Dokaz. Tvrdnja je očita za $n = 2$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n > 1$. Neka je C $(n+1)$-dimenzionalna binarna kocka i neka su

$$V = \{(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) \ : \ a_i \in \{0, 1\}\} \qquad \text{i} \qquad E$$

skupovi njezinih vrhova, odnosno bridova. Izbacimo iz E proizvoljan skup od $n-1$ bridova i označimo taj skup s D. Uzmimo bilo koji brid e iz D. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da taj brid spaja vrhove

$$v = (0, b_1, \ldots, b_n) \qquad \text{i} \qquad u = (1, b_1, \ldots, b_n),$$

gdje su $b_i \in \{0,1\}$. Promotrimo podgrafove C_0 i C_1 naše kocke C čiji su skupovi vrhova redom jednaki

$$V_0 = \{(0, a_2, \ldots, a_{n+1}) \ : \ a_i \in \{0,1\}\} \qquad \text{i} \qquad V_1 = \{(1, a_2, \ldots, a_{n+1}) \ : \ a_i \in \{0,1\}\},$$

neka su E_0 i E_1 odgovarajući skupovi bridova. Primijetimo da su C_0 i C_1 zapravo međusobno izomorfne n-dimenzionalne binarne kocke, gdje je izomorfizam $f : V_0 \to V_1$ očit:

$$f(0, a_2, \ldots, a_{n+1}) = (1, a_2, \ldots, a_{n+1}).$$

Također, vrijedi da je $V = V_0 \cup V_1$ i očito je da su skupovi V_0 i V_1 disjunktni. Napomenimo da izomorfizam grafova, osim što je bijekcija među skupovima vrhova, čuva povezanost, tj. originali su povezani ako i samo ako su im slike povezane.

Označimo $D_0 = E_0 \cap D$, $D_1 = E_1 \cap D$ i D_2 neka je skup bridova iz D koji se ne nalaze niti u E_0, niti u E_1. Očito je $D = D_0 \cup D_1 \cup D_2$, gdje su svi skupovi u uniji međusobno disjunktni. Jasno je da je $e \in D_2$ pa je onda $|f(D_0) \cup D_1| \leq |D| - 1 = n - 2$. Dakle, iskoristimo li pretpostavku indukcije, zaključujemo da ako iz kocke C_1 izbacimo sve bridove koji se nalaze u $f(D_0) \cup D_1$, dobivamo Hamiltonov graf, tj. u kocki C_1 postoji Hamiltonov ciklus koji na sadrži bridove iz $f(D_0) \cup D_1$ (posebno, ni one iz D), neka je to ciklus

$$v = v_1, v_2, \ldots, v_{2^n}.$$

Neka su $u_i \in C_0$ takvi da je $f(u_i) = v_i$, za $i = 1, 2, \ldots, 2^n$, tada je jasno da je

$$u = u_1, u_2, \ldots, u_{2^n}$$

Hamiltonov ciklus u C_0 koji ne sadrži bridove iz D_0 (a time ni iz D). Nadalje, vrhovi u_i i v_i se razlikuju u točno jednoj koordinati (prvoj) pa su oni spojeni bridom za sve $i = 1, 2, \ldots, 2^n$. Pogledajmo parove bridova (u_i, v_i) i (u_{i+1}, v_{i+1}) za $i = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$. Kako je $|D_2| \leq |D| = n - 1$, vidimo da za najviše $2(n-1)$ ovih parova vrijedi da se barem jedan brid od njih 2 nalazi u D_2 (odnosno u D). Jasno je da je $2^n - 1 \geq 2(n-1)$ pa onda postoji i takav da se niti brid (u_i, v_i), niti brid (u_{i+1}, v_{i+1}) ne nalaze u D_2, odnosno u D. Konačno smo gotovi, naime

$$u_1, u_2, \ldots, u_i, v_i, v_{i-1}, \ldots, v_1, v_{2^n}, v_{2^n-1}, \ldots, v_{i+1}, u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_{2^n}$$

je Hamiltonov ciklus u kocki C koji ne prolazi bridovima iz D. ✓

IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - RJEŠENJA

SENIORI

04. 03. 2016.

Zadatak 1. Izračunajte:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x,$ (b) $\displaystyle I(a)=\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x, \quad \text{za } a\in\langle 0,\infty\rangle.$

Rješenje. Za (a) dio zadatka koristimo zgodan trik:

$$I(1)=\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{ccc} x & = & \frac{1}{y} \\ \mathrm{d}x & = & -\frac{\mathrm{d}y}{y^2}\end{array}\right\}=\int_\infty^0 \frac{\ln\frac{1}{y}}{\frac{1}{y^2}+1}\cdot\frac{-1}{y^2}\,\mathrm{d}y=\int_\infty^0\frac{\ln y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y=-I(1),$$

iz čega vidimo da je $I(1)=0$. (b) dio zadatka se lako rješava svođenjem na (a) dio:

$$I(a)=\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{ccc} x & = & ay \\ \mathrm{d}x & = & a\,\mathrm{d}y\end{array}\right\}=\int_0^\infty \frac{\ln(ay)}{a^2y^2+a^2}\cdot a\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\left(\int_0^\infty\frac{\ln a}{y^2+1}\,\mathrm{d}y+\int_0^\infty\frac{\ln y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y\right)=\frac{1}{a}\cdot\left(\ln a\cdot\operatorname{arc\,tg} y\big|_0^\infty+I(1)\right),$$

konačno je, za $a\in\langle 0,\infty\rangle$, $I(a)=\frac{\pi\ln a}{2a}$. ✓

Zadatak 2.

(a) Neka je V konačno dimenzionalan vektorski prostor i neka su V_1 i V_2 njegovi potprostori. Neka je $A\in L(V)$ takav da je $A(V_1)\subseteq V_2$ i $A(V_2)\subseteq V_1$. Dokažite da je $Tr(A|_{V_1\cap V_2})=Tr(A|_{V_1+V_2})$.

(b) Neka je V konačno dimenzionalan vektorski prostor i neka su V_1, V_2 i V_3 njegovi potprostori. Neka je $A\in L(V)$ takav da je $A(V_1)\subseteq V_2$, $A(V_2)\subseteq V_3$ i $A(V_3)\subseteq V_1$. Pokažite da ne mora nužno biti $Tr(A|_{V_1\cap V_2\cap V_3})=Tr(A|_{V_1+V_2+V_3})$.

Rješenje.

(a) Neka je B_{12} baza prostora $V_1\cap V_2$. Nadopunimo je sa skupom B_1 do baze za V_1, a skupom B_2 do baze za V_2. Tada je $B=B_{12}\cup B_1\cup B_2$ baza za V_1+V_2 (skupovi u uniji su disjunktni). Neka je $\langle,\rangle$ skalarni produkt na V_1+V_2 pridružen bazi B, tj. definiramo $\langle b_1,b_2\rangle=\delta_{b_1,b_2}$ za sve $b_1,b_2\in B$. Tada je

$$Tr(A|_{V_1+V_2})=\sum_{b\in B}\langle A(b),b\rangle=Tr(A|_{V_1\cap V_2})+\sum_{b\in B-B_{12}}\langle A(b),b\rangle\,.$$

Iz pretpostavke na operator A slijedi da je $A(\mathrm{span}(B_i))\cap\mathrm{span}(B_i)=\{0\}$, za $i=1,2$. Dakle za sve $b\in B-B_{12}$ vrijedi $\langle A(b),b\rangle=0$ (ovdje $\mathrm{span}(S)$ označava vektorski prostor razapet vektorima iz skupa S).

(b) Neka je $V=\mathbb{R}^2$; V_1, V_2 i V_3 neka su, redom, x os, njena rotacija za 120° te njena rotacija za 240°. Operator A neka je operator rotacije oko ishodišta u pozitivnom smjeru za 120°. Ovo nam daje kontraprimjer. Napišimo to formalno. $V=\mathbb{R}^2$, V_1, V_2, V_3 su potprostori od V dani, redom, svojim bazama: $\{(1,0)\}$, $\{(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})\}$, $\{(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})\}$. Operator A zadamo njegovim matričnim prikazom:

$$A=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Sada vidimo da je $A(V_1)\subseteq V_2$, $A(V_2)\subseteq V_3$ i $A(V_3)\subseteq V_1$, ali $Tr(A|_{V_1\cap V_2\cap V_3})=Tr(A|_{\{0\}})=0\neq -1=Tr(A|_V)=Tr(A|_{V_1+V_2+V_3})$. ✓

Zadatak 3. Ako su $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ i $m\in\mathbb{N}_0$, dokažite da se funkcija g definirana formulom

$$g(x):=\frac{f(x)-\sum_{j=0}^{m}f^{(j)}(0)x^j/j!}{x^{m+1}} \quad \text{za } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

može proširiti do funkcije iz $C^\infty(\mathbb{R})$.

Rješenje. Kako je očigledno $g\in C^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, dovoljno je pokazati da u točki 0 postoje derivacije $g^{(n)}(0)$ svakog reda i da su sve derivacije $g^{(n)}$ neprekidne u $x=0$. Zahvaljujući L'Hôpitalovom pravilu, u tu svrhu je pak dovoljno samo pokazati da za svaki $n\in\mathbb{N}_0$ postoji limes $\lim_{x\to 0}g^{(n)}(x)$. Važno je napomenuti da u zadatku **ne** pretpostavljamo analitičnost od f, jer za analitičke funkcije (tj. one koje se mogu razviti u red potencija) tvrdnja trivijalno slijedi iz računa:

$$\begin{aligned}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^n\Big(f(x)-\sum_{j=0}^{m}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}x^j\Big)\Big/x^{m+1} &= \Big(\frac{d}{dx}\Big)^n\sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}x^{j-m-1}\\ =\Big(\frac{d}{dx}\Big)^n\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^{(j+m+1)}(0)}{(j+m+1)!}x^j &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^{(j+m+n+1)}(0)}{(j+m+n+1)!}\frac{(j+n)!}{j!}x^j.\end{aligned}$$

Ipak, gornji račun nam barem daje naslutiti kako i samo uz pretpostavku $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ vrijedi

$$\lim_{x\to 0}g^{(n)}(x)=\frac{n!}{(m+n+1)!}f^{(m+n+1)}(0).$$

Pokazat ćemo da je to doista slučaj.

Promatramo li novu funkciju

$$\tilde{f}(x):=f(x)-\sum_{j=0}^{m}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}x^j,$$

ona će biti klase C^∞ i zadovoljavati $\tilde{f}^{(j)}(0)=0$ za $j=0,1,\ldots,m$ te $\tilde{f}^{(j)}(0)=f^{(j)}(0)$ za $j\geq m+1$. Zato indukcijom po broju $n\in\mathbb{N}_0$ možemo dokazivati ekvivalentnu tvrdnju:

Ako su $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ i $m\in\mathbb{N}_0$ te ako je $f^{(j)}(0)=0$ za $j=0,1,\ldots,m$, tada vrijedi
$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^n\frac{f(x)}{x^{m+1}}=\frac{n!}{(m+n+1)!}f^{(m+n+1)}(0).$$

Kao što piše, osnovna ideja je provoditi indukciju po broju n, a **ne** po broju m.

Baza $n=0$ slijedi za svaki $m\in\mathbb{N}_0$ naprosto $(m+1)$-strukom primjenom L'Hôpitalovog pravila:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^{m+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(m+1)}(x)}{(m+1)!}=\frac{1}{(m+1)!}f^{(m+1)}(0).$$

Uzmimo neki $n \in \mathbb{N}$ i pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n-1$. U koraku indukcije primijetimo

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{x^{m+1}} = \frac{xf'(x)-(m+1)f(x)}{x^{m+2}}.$$

Funkcija

$$h \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}), \quad h(x) := xf'(x)-(m+1)f(x)$$

zadovoljava

$$h^{(j)}(x) = xf^{(j+1)}(x) + (j-m-1)f^{(j)}(x),$$

tj.

$$h^{(j)}(0) = (j-m-1)f^{(j)}(0),$$

pa je $h^{(j)}(0) = 0$ za $j = 0, 1, \ldots, m+1$. To za $j \le m$ slijedi iz pretpostavke na f, a za $j = m+1$ je očigledno. Primjenom pretpostavke indukcije na funkciju h za svaki $m \in \mathbb{N}_0$ slijedi

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\frac{h(x)}{x^{m+2}} = \frac{(n-1)!}{(m+n+1)!}h^{(m+n+1)}(0),$$

što zbog

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{x^{m+1}} = \frac{h(x)}{x^{m+2}}, \quad h^{(m+n+1)}(0) = nf^{(m+n+1)}(0)$$

postaje upravo tražena jednakost. Time je završen dokaz indukcijom po n. ✓

Zadatak 4. Neka je dan jednostavni neusmjereni graf s $n \in \mathbb{N}$ vrhova i $m \in \mathbb{N}_0$ bridova te označimo $d = 2m/n$. (Dakle, d je prosječni stupanj vrha u grafu.) Pokažite da se za svaki $s \in \mathbb{N}_0$ na tom grafu može izvesti barem nd^s različitih šetnji duljine s.
Dokaz tvrdnje u slučaju $s \le 2$ vrijedi 2 boda.
(Šetnja duljine s je uređena $(s+1)$-torka (ne nužno različitih) vrhova grafa $(v_0, v_1, \ldots, v_s)$ takva da su vrhovi v_{j-1} i v_j spojeni bridom za $j = 1, 2, \ldots, s$. U slučaju $d = 0 = s$ izraz d^s interpretiramo kao 1.)

Rješenje. Željeni rezultat je lako direktno provjeriti za:

- $s = 0$, kada šetnji duljine 0 ima n,
- $s = 1$, kada šetnji duljine 1 ima $2m$ ("šetamo" duž nekog brida u bilo kojem smjeru), što je baš jednako nd.

Stoga u daljnjem pretpostavljamo da je $s \ge 2$.

Najprije dokažimo kvantitativno slabiju tvrdnju, da postoji barem $n(d/4)^s$ šetnji duljine s. Tu tvrdnju ćemo pokazati matematičkom indukcijom po broju vrhova grafa. Za $n = 1$ moramo imati $m = 0$, tj. $d = 0$ pa je tvrdnja očigledna. Za $n = 2$ u jedinom netrivijalnom slučaju $m = 1$, tj. $d = 1$ imamo točno po dvije šetnje svake duljine. Uzmimo $n \ge 3$ i pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za grafove s $n-1$ vrhova. Promotrimo proizvoljni graf s n vrhova i neka je $\delta \in \mathbb{N}_0$ najmanji stupanj vrha u tom grafu.

Razlikujemo dva slučaja.

(1°) $\delta \ge d/4$
Šetnju na grafu dobijemo tako da krenemo od proizvoljnog vrha, odabranog na n načina, te se potom redom pomičemo u neki od susjednih vrhova, a za svakog od njih imamo barem δ mogućnosti. Zato je broj šetnji barem $n\delta^s \ge n(d/4)^s$.

(2°) $\delta < d/4$

Postoji vrh stupnja δ. Izbacimo ga iz grafa te primijenimo pretpostavku indukcije na novodobiveni graf s $n-1$ vrhova. Broj šetnji duljine s u novom grafu (pa pogotovo i u polaznom grafu) je barem

$$(n-1)\Big(\frac{2(m-\delta)}{4(n-1)}\Big)^s > \frac{(nd-d/2)^s}{4^s(n-1)^{s-1}} = n\Big(\frac{d}{4}\Big)^s \cdot \Big(\frac{n-1/2}{n-1}\Big)^s \cdot \frac{n-1}{n}$$
$$\geq n\Big(\frac{d}{4}\Big)^s \cdot \Big(\frac{n-1/2}{n-1}\Big)^2 \cdot \frac{n-1}{n} > n\Big(\frac{d}{4}\Big)^s.$$

Time se završen korak indukcije.

U svrhu dokaza tražene (jače) nejednakosti promotrit ćemo "k-tu potenciju grafa", tj. novi graf čiji vrhovi su k-torke $(v_1, \dots, v_k)$ vrhova polaznog grafa, a $(v_1, \dots, v_k)$ i $(w_1, \dots, w_k)$ su susjedne ako i samo ako su v_i i w_i susjedni u polaznom grafu za $i = 1, \dots, k$. Novi graf ima n^k vrhova i $2^{k-1}m^k$ bridova (jer to je $(2m)^k$ načina za odabir k uređenih parova, ali poredak cijelih k-torki je nebitan) pa mu je prosječni stupanj

$$\frac{2 \cdot 2^{k-1}m^k}{n^k} = d^k.$$

Ako je N broj šetnji duljine s u polaznom grafu, tada ih u k-toj potenciji grafa ima točno N^k, jer su to naprosto k-torke šetnji u polaznom grafu. Primjenom dokazane (slabije) nejednakosti na taj novi graf dobivamo

$$N^k \geq n^k(d^k/4)^s.$$

Vađenjem k-tog korijena slijedi $N \geq nd^s 4^{-s/k}$ pa puštanjem $k \to \infty$ konačno dobivamo $N \geq nd^s$. ✓

Napomene. Zadatak je rezultat P. Erdősa i M. Simonovitsa iz 1982., dok su ovaj elegantni dokaz dali N. Alon i I. Z. Ruzsa.

Za $s = 2$ je još moguće dati jednostavni dokaz. Naime, ako su $d_1, d_2, \dots, d_n$ stupnjevi vrhova grafa, tada se lako vidi da je broj šetnji duljine 2 jednak

$$d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2,$$

jer naprosto "prođemo" kroz i-ti vrh na d_i^2 načina, što je veće ili jednako

$$n^{-1}(d_1 + d_2 + \cdots + d_n)^2 = (2m)^2/n = nd^2.$$

Ipak, već za $s = 3$ nije poznat jednostavniji dokaz tvrdnje.

Primijetimo da se jednakost svakako postiže za grafove čiji svi vrhovi imaju isti stupanj (jednak d).