1.3 Derivacija kompleksne funkcije

Zadatak 1.3.1. U kojim točkama su sljedeće funkcije derivabilne?

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z}$

(b) $f(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$

(c) $f(z) = |z|^2$

Rješenje. (a) Koristeći zapis $z = x + iy$ imamo

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \cdot \frac{-y}{x^2+y^2},$$

pa su realni i imaginarni dio ove funkcije

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Sada želimo provjeriti vrijede li Cauchy-Riemannovi uvjeti, pa u tu svrhu tražimo parcijalne derivacije. Računamo

$$\partial_x u(x,y) = \frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\partial_y u(x,y) = \frac{-x}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\partial_x v(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\partial_y v(x,y) = \frac{-(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Vidimo da vrijedi sljedeće:

$$\partial_x u(x,y) = \partial_y v(x,y), \quad \partial_y u(x,y) = -\partial_x v(x,y),$$

dakle zadovoljeni su Cauchy-Riemannovi uvjeti. Također, funkcije u i v su diferencijabilne na cijeloj domeni kao realne funkcije dviju realnih varijabli.

Prema Cauchy-Riemannovom teoremu zaključujemo da je f derivabilna na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (u 0 nije definirana).

Iz Cauchy-Riemannovog teorema također znamo i kako izgleda derivacija:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \partial_x u(x,y) + i \cdot \partial_x v(x,y) = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + i \cdot \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2+i2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{-(x-iy)^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\bar{z}^2}{|z|^4} = -\frac{\bar{z}^2}{z^2\bar{z}^2} = -\frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

(b) $f(x+iy) = e^x(\cos y + i\sin y)$

$u(x,y) = e^x \cos y$, $v(x,y) = e^x \sin y$

Računamo parcijalne derivacije:

$$\partial_x u(x,y) = e^x \cos y, \qquad \partial_y u(x,y) = -e^x \sin y,$$

$$\partial_x v(x,y) = e^x \sin y, \qquad \partial_y v(x,y) = e^x \cos y.$$

Kao u (a) dijelu zadatka, vidimo da su funkcije u i v diferencijabilne na cijeloj svojoj domeni kao realne funkcije realnih varijabli te vrijede Cauchy-Riemannovi uvjeti $\partial_x u(x,y) = \partial_y v(x,y)$, $\partial_y u(x,y) = -\partial_x v(x,y)$. Dakle, f je derivabilna na $\mathbb{C}$ i vrijedi

$f'(z) = \partial_x u(x,y) + i \cdot \partial_x v(x,y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i\sin y) = f(z).$

(c) $f(z) = |z|^2$

$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$, pa je $u(x,y) = x^2 + y^2$, a $v(x,y) = 0$.

Računamo parcijalne derivacije:

$$\partial_x u(x,y) = 2x, \qquad \partial_y u(x,y) = 2y,$$

$$\partial_x v(x,y) = 0, \qquad \partial_y v(x,y) = 0.$$

Vidimo da Cauchy-Riemannovi uvjeti

$$\partial_x u(x,y) = \partial_y v(x,y), \quad \partial_y u(x,y) = -\partial_x v(x,y)$$

vrijede ako i samo ako

$$2x = 0, \quad 2y = 0,$$

tj. ako i samo ako $z = 0$.

Funkcije u i v su diferencijabilne na cijeloj svojoj domeni kao realne funkcije realnih varijabli, ali Cauchy-Riemannovi uvjeti vrijede samo u točki $z = 0$, pa zaključujemo da je funkcija f derivabilna samo u točki $z = 0$ te vrijedi

$$f'(0) = \partial_x u(0,0) + i \cdot \partial_x v(0,0) = 0.$$

□

Zadatak 1.3.2. Koje su od sljedećih funkcija harmonijske?

(a) $u(x,y) = x^2 + y$

(b) $u(x,y) = -2e^x \cos y$

(c) $u(x,y) = \sin x \operatorname{ch} y - y^2$

(d) $u(x,y) = x^2 - y^2 - x$

Rješenje. (a) Računamo $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 2 + 0 = 2 \neq 0$ i vidimo da u nije harmonijska.

(b) Iz $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = -2e^x \cos y + 2e^x \cos y = 0$ se vidi da je funkcija harmonijska. Alternativno, mogli smo primijetiti da je u realni dio kompleksne funkcije $f(z) = -2e^z$.

(c) Prve derivacije iznose

$$\partial_x u = \cos x \operatorname{ch} y, \ \partial_y u = \sin x \operatorname{sh} y - 2y.$$

Imamo

$$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = -\sin x \operatorname{ch} y + \sin x \operatorname{ch} y - 2 = -2$$

pa slijedi da u nije harmonijska.

(d) Vrijedi

$$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 2 - 2 = 0$$

pa je funkcija u harmonijska.

□

Zadatak 1.3.3. Odredite funkciju v tako da kompleksna funkcija $f = u + iv$ kojoj je realni dio

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y$$

bude derivabilna, ako takva postoji.

Rješenje. Prvo idemo provjeriti je li u harmonijska (ako nije, traženi v ne može postojati!):

$$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 6x - 6x = 0.$$

Cauchy-Riemannovi uvjeti nam kažu:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y^2 &= \partial_x u = \partial_y v \\ 1 - 6xy &= \partial_y u = -\partial_x v. \end{aligned}$$

Iz prvog uvjeta slijedi:

$$v(x, y) = \int (3x^2 - 3y^2) dy + h(x) = 3x^2 y - y^3 + h(x),$$

gdje je h neka nepoznata funkcija jedne varijable. Možemo je odrediti iz drugog uvjeta:

$$6xy - 1 = \partial_x v = 6xy + h'(x) \implies h(x) = -x + c, \ c \in \mathbb{R}$$

Slijedi $v(x, y) = 3x^2 y - y^3 - x + c$.

Kako izgleda $f = u + iv$?

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= (x^3 - 3xy^2 + y) + i(3x^2 y - y^3 - x + c) \\ &= (x^3 + 3x(iy)^2 + 3x^2 iy + (iy)^3) - i(x + iy) + ic \\ &= (x + iy)^3 - i(x + iy) + ic \\ &\implies f(z) = z^3 - iz + ic, \ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje (otvoren i povezan podskup od $\mathbb{C}$). Ako je zadan realni dio derivabilne funkcije $f = u + iv$, tada se njen imaginarni dio može dobiti formulom

$$v(x, y) = \int_{x_0}^{x} -\partial_y u(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y} \partial_x u(x_0, y) dy + c,$$

gdje je $z_0 = x_0 + iy_0$ proizvoljna točka iz Ω. Obratno, ako imamo zadanu funkciju v, tada se realni dio u može naći formulom

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} \partial_y v(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y} -\partial_x v(x_0, y) dy + c.$$

1.4 Elementarne funkcije

Zadatak 1.4.1. Dokažite da je eksponencijalna funkcija derivabilna.

Rješenje. Realni i imaginarni dio eksponencijalne funkcije su

$$u(x,y) = e^x \cos y, \quad v(x,y) = e^x \sin y.$$

To su očito diferencijabilne funkcije na cijelom $\mathbb{R}$. Deriviramo:

$$\begin{aligned} \partial_x u &= e^x \cos y, \quad & \partial_y u &= -e^x \sin y \\ \partial_x v &= e^x \sin y, \quad & \partial_y v &= e^x \cos y. \end{aligned}$$

i vidimo da su Cauchy-Riemannovi uvjeti zadovoljeni. □

Zadatak 1.4.2. Riješite jednadžbe:

(a) $e^z + i = 0$

(b) $e^{ix} = \cos \pi x, \ \ x \in \mathbb{R}$

Rješenje. (a) Pišemo $z = x + iy$ i razdvajamo jednadžbu na realni i imaginarni dio:

$$e^x \cos y = 0, \ \ e^x \sin y = -1.$$

Slijedi da moramo imati $\cos y = 0$, dakle

$$y \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ako je $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, tada je $\sin y = 1$ pa slijedi da bi morali imati $e^x = -1$, što je nemoguće jer $x \in \mathbb{R}$. Sada vidimo da su sva rješenja dana s

$$x = 0, \ \ y = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, \ \ k \in \mathbb{Z},$$

to jest, sa kompleksnim brojevima oblika

$$i(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi), \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

(b) Razdvajamo jednadžbu na realni i imaginarni dio:

$$\cos x = \cos(\pi x), \ \ \sin x = 0.$$

Iz $\sin x = 0$ slijedi $x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Dakle, moramo imati $\cos(k\pi) = \cos(k\pi^2)$, iz čega slijedi da je $k = 0$, to jest da je jedino rješenje $x = 0$.

□