3 Teorem o reziduumima i primjene

3.1 Reziduumi

Zadatak 3.1.1. Izračunajte reziduume funkcija u njihovim singularitetima:

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z^4 - z^2}$

(b) $f(z) = \dfrac{1}{z^n - 1}$

(c) $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1 - z}$

Rješenje. (a) Iz

$$f(z) = \frac{1}{z^4 - z^2} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z+1}$$

vidimo da su singulariteti funkcije f točke 0, 1 i -1.

Funkcija $z \mapsto \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z+1}$ je holomorfna u nuli i nula nije njezina nultočka, pa kao u zadatku 2.3.6. zaključujemo da je 0 pol drugog reda funkcije f.

Računamo:

$$\operatorname{res}(f, 0) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{1}{z^2(z^2-1)} \right) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z^2-1)} = \lim_{z \to 0} \frac{-2z}{(z^2-1)^2} = 0.$$

Funkcija $z \mapsto \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z+1}$ je holomorfna u 1 i 1 nije njezina nultočka, pa zaključujemo da je 1 pol prvog reda funkcije f.

Računamo:

$$\operatorname{res}(f, 1) = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{1}{z^2(z-1)(z+1)} = \lim_{z \to 1} \frac{1}{z^2(z+1)} = \frac{1}{2}.$$

Funkcija $z \mapsto \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z^2}$ je holomorfna u -1 i -1 nije njezina nultočka, pa zaključujemo da je -1 pol prvog reda funkcije f.

Računamo:

$$\operatorname{res}(f, -1) = \lim_{z \to -1} (z+1) \frac{1}{z^2(z-1)(z+1)} = \lim_{z \to -1} \frac{1}{z^2(z-1)} = -\frac{1}{2}.$$

(b) Singulariteti funkcije f su n-ti korijeni iz jedinice, tj. točke

$$z_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Točke z_k su nultočke prvog reda funkcije $z \mapsto z^n - 1$, tj. polovi prvog reda funkcije f. Računamo:

$$\operatorname{res}(f, z_k) = \frac{1}{(z^n - 1)'}\Big|_{z = z_k} = \frac{1}{n z_k^{n-1}} = \frac{1}{n e^{\frac{2k\pi i(n-1)}{n}}} = \frac{1}{n} e^{\frac{2k\pi i}{n}}.$$

(c) Funkcija je

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}.$$

Singulariteti funkcije f su 0 i 1. Točka 0 je bitni singularitet funkcije f, a točka 1 pol prvog reda funcije f.

Budući da je 1 pol prvog reda, reziduum računamo ovako:

$$\operatorname{res}(f,1) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} = \lim_{z\to 1}(-e^{\frac{1}{z}}) = -e.$$

Kako bismo izračunali reziduum u 0, funkciju moramo razviti u red, jer je 0 bitni singularitet. Vrijedi:

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{\frac{1}{z}} \cdot \frac{1}{1-z} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \dots\right) \cdot \left(1 + z + z^2 + z^3 + \dots\right). \end{aligned}$$

U gornjem izrazu gledamo koji se svi koeficijenti pojavljuju uz član $\frac{1}{z}$ i dobijemo

$$\operatorname{res}(f,0) = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e - 1.$$

□

3.2 Teorem o reziduumima

Zadatak 3.2.1. Izračunajte integrale:

(a) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{1+z^4}$, gdje je $\Gamma = S(1,1)$.

(b) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{(z+1)^2(z^2+1)}$, gdje je $\Gamma = S(-1+i,2)$.

Rješenje. (a) Funkcija pod integralom je

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)},$$

gdje su

$$z_1 = e^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}},\ z_2 = e^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}},\ z_3 = e^{\frac{-3\pi}{4}} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}},\ z_4 = e^{\frac{-\pi}{4}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Te točke su singulariteti funkcije f. Tvrdnja zadatka 2.6.3. nam govori da su to polovi prvog reda. Zadana krivulja $\Gamma = S(1,1)$ obuhvaća singularitete z_1 i z_4, pa je

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z)dz &= \int_\Gamma \frac{1}{1+z^4}dz \\
&= 2\pi i \left(\operatorname{res}(f, z_1) + \operatorname{res}(f, z_4)\right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=z_1} + \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=z_4} \right) \\
&= \frac{\pi i}{2} \left(e^{\frac{-3i\pi}{4}} + e^{\frac{3i\pi}{4}} \right) \\
&= \frac{\pi i}{2} \cdot 2\cos\frac{3\pi}{4} \\
&= -\frac{\pi i}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

(b) Funkcija pod integralom je

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z^2+1)}.$$

Singulariteti funkcije su točke $z_1 = -1, z_2 = i, z_3 = -i$. Tvrdnja zadatka 2.6.3. nam govori da je z_1 pol reda 2, a z_2 i z_3 polovi prvog reda funkcije f. Zadana krivulja $\Gamma = S(-1+i, 2)$ obuhvaća singularitete z_1 i z_2, pa je

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z)dz &= \int_\Gamma \frac{1}{(z+1)^2(z^2+1)}dz \\
&= 2\pi i \left(\operatorname{res}(f, -1) + \operatorname{res}(f, i)\right) \\
&= 2\pi i \left(\lim_{z\to -1} \frac{1}{(2-1)!} \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^2+1}\right) + \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z+1)^2(z^2+1)} \right) \\
&= 2\pi i \left(\lim_{z\to -1} \frac{-2z}{(z^2+1)^2} + \lim_{z\to i} \frac{1}{(z+1)^2(z+i)} \right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{\pi i}{2}
\end{aligned}$$

□

Zadatak 3.2.2. Izračunajte reziduum u točki ∞ za funkciju

(a) $f(z) = \dfrac{z^2 - z + 1}{z^3 - 2z + 1}$

(b) $f(z) = z \sin \dfrac{1}{z+1}$

(c) $f(z) = \sin \dfrac{z}{z+1}$

Rješenje. (a) Računamo:

$$f_1(z) = f(1/z) = \frac{\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1}{\frac{1}{z^3} - 2\frac{1}{z} + 1} = \frac{z - z^2 + z^3}{1 - 2z^2 + z^3}.$$

Vidimo da je funkcija f_1 holomorfna u 0, pa je funkcija f analitička u ∞ i vrijedi

$$f(\infty) = \lim_{z\to 0} f_1(z) = 0.$$

Sada možemo izračunati reziduum:

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}(f,\infty) &= \lim_{z\to\infty} z(f(\infty)-f(z)) \\
&= \lim_{z\to\infty} z(0-f(z)) \\
&= \lim_{z\to\infty} z\left(-\frac{z^2-z+1}{z^3-2z+1}\right) \\
&= -\lim_{z\to\infty} \frac{1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}}{1-\frac{2}{z^2}+\frac{1}{z^3}} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

(b) Jedini singularitet funkcije

$$f(z) = z\sin\frac{1}{z+1}$$

je točka -1. Vrijedi

$$\operatorname{res}(f,\infty) = -\operatorname{res}(f,-1).$$

Odredimo koeficijent uz $\frac{1}{z}$ u Laurentovom razvoju funkcije oko točke -1:

$$\begin{aligned}
f(z) &= ((z+1)-1)\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{3!(z+1)^3}+\dots\right) \\
&= 1-\frac{1}{z+1}-\frac{1}{3!(z+1)^2}+\frac{1}{3!(z+1)^3}+\dots
\end{aligned}$$

Koeficijent je $\operatorname{res}(f,-1)=-1$, pa je

$$\operatorname{res}(f,\infty)=1.$$

(c) Računamo:

$$f_1(z) = f(1/z) = \sin\frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}+1} = \sin\frac{1}{1+z}.$$

Vidimo da je f_1 holomorfna u 0. Sada

$$\operatorname{res}(f,\infty) = -f_1'(0) = -\cos\frac{1}{1+z}\cdot\frac{-1}{(1+z)^2}\bigg|_{z=0} = \cos 1.$$

□

Zadatak 3.2.3. Izračunajte integral

$$I = \int_\Gamma \frac{z^3}{z^4-1}\,dz, \quad \Gamma = S(0,2).$$

Rješenje. Singulariteti funkcije f koja je pod integralom su $\pm1, \pm i$, a krivulja Γ ih sve obilazi, pa je

$$I = -2\pi i \operatorname{res}(f,\infty).$$

Računamo

$$f_1(z) = f(1/z) = \frac{\frac{1}{z^3}}{\frac{1}{z^4}-1} = \frac{z}{1-z^4}.$$

Vidimo da je funkcija f_1 holomorfna u 0, pa je funkcija f analitička u ∞.

$$\operatorname{res}(f,\infty) = \lim_{z\to\infty} z(0-f(z)) = \lim_{z\to\infty}\left(-\frac{z^4}{z^4-1}\right) = -1.$$

Slijedi da je $I = -2\pi i\cdot(-1) = 2\pi i$. □

Zadatak 3.2.4. Izračunajte integral

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^4-1)^3(z-3)}.$$

Rješenje. Singulariteti su $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1, z_4 = -i, z_5 = 3$, a krivulja Γ obuhvaća prva četiri singulariteta, pa vrijedi

$$I = \sum_{k=1}^{4} \operatorname{res}(f, z_k) = -\operatorname{res}(f, 3) - \operatorname{res}(f, \infty).$$

Računamo:

$$f_1(z) = f(1/z) = \frac{1}{\left(\frac{1}{z^4}-1\right)^3\left(\frac{1}{z}-3\right)} = \frac{z^{13}}{(1-z^4)^3(1-3z)}.$$

Funkcija f_1 je holomorfna u 0, pa je funkcija f analitička u ∞. Vrijedi $f(\infty) = \lim_{z\to 0} f_1(z) = 0$, pa imamo

$$\operatorname{res}(f,\infty) = \lim_{z\to\infty} z\left(0 - \frac{1}{(z^4-1)^3(z-3)}\right) = 0.$$

Točka 3 je pol prvog reda od f pa je

$$\operatorname{res}(f,3) = \lim_{z\to 3}(z-3)\frac{1}{(z^4-1)^3(z-3)} = \frac{1}{(3^4-1)^3} = \frac{1}{80^3}.$$

Slijedi da je $I = -\frac{1}{80^3}$. $\square$