3.1 Rouchéov teorem

Zadatak 3.3.1. Nađite broj nultočaka polinoma

$$p(z) = z^8 - 6z^6 - z^3 + 2$$

unutar kruga $K(0,1)$.

Rješenje. Želimo naći funkcije f i g takve da je $p = f + g$,

$$|g(z)| < |f(z)| \text{ za sve } z \in S(0,1)$$

i da broj nultočaka funkcije f znamo odrediti. Stavimo

$$\begin{aligned} f(z) &= -6z^6 \\ g(z) &= z^8 - z^3 + 2. \end{aligned}$$

Vidimo da je $p = f + g$ i da za $z \in S(0,1)$ imamo

$$|g(z)| \leq |z|^8 + |z|^3 + 2 = 4 < 6 = |f(z)|.$$

Sada je broj nultočaka funkcije p unutar $S(0,1)$

$$N_{S(0,1)}(p) = N_{S(0,1)}(f) = 6.$$

Napomena. Ovdje smo mogli na primjer uzeti i ovakav rastav

$$\begin{aligned} f(z) &= z^8 - 6z^6 \\ g(z) &= -z^3 + 2. \end{aligned}$$

□

Zadatak 3.3.2. Odredite broj rješenja jednadžbe

$$z^4 = \sin z$$

u području $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \pi\}$.

Rješenje. Podrazumijeva se da broj rješenja jednadžbe određujemo uzimajući u obzir njihovu kratnost. Trebamo odrediti broj nultočki funkcije $h(z) = z^4 - \sin z$ u $K(0,\pi)$. Stavimo

$$\begin{aligned} f(z) &= z^4 \\ g(z) &= -\sin z. \end{aligned}$$

Tada imamo $h = f + g$ i za $z = x + yi \in S(0,\pi)$ imamo:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \pi^4 \\ |g(z)| &= |\sin z| \\ &= \left| \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(|e^{iz}| + |e^{-iz}|\right) \\ &= \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y}). \end{aligned}$$

Za $z = x + yi \in S(0, \pi)$ vrijedi $-\pi \leq y \leq \pi$, pa imamo

$$\frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \leq \frac{1}{2}(e^\pi + e^\pi) = e^\pi < e^4 < \pi^4.$$

Sada smo pokazali da za $z \in S(0, \pi)$ vrijedi $|g(z)| < |f(z)|$, pa po Rouchéovom teoremu slijedi

$$N_{S(0,\pi)}(h) = N_{S(0,\pi)}(f) = 4.$$

□

Zadatak 3.3.3. Odredite broj nultočaka polinoma $p(z) = z^5 + 5z - 1$.

(a) unutar $K(0, 1)$

(b) u vijencu $V(0, 1, 2)$

Rješenje. (a) Stavimo

$$\begin{aligned} g(z) &= z^5 - 1 \\ f(z) &= 5z. \end{aligned}$$

Tada je $p = f + g$, a za $z \in S(0, 1)$ imamo

$$|g(z)| \leq |z^5| + 1 = 2 < 5 = |f(z)|,$$

pa po Rouchéovom teoremu zaključujemo

$$N_{S(0,1)}(p) = N_{S(0,1)}(f) = 1.$$

(b) Odredit ćemo $N_{S(0,2)}(p)$, te od toga oduzeti $N_{S(0,1)}(p)$ i one nultočke od p koje se nalaze na kružnici $S(0, 1)$. Stavimo:

$$\begin{aligned} g(z) &= 5z \\ f(z) &= z^5 - 1. \end{aligned}$$

Za $z \in S(0, 2)$ vrijedi

$$|f(z)| \geq |z^5| - 1 = 2^5 - 1 > 10 = |g(z)|,$$

pa po Rouchéovom teoremu zaključujemo

$$N_{S(0,2)}(p) = N_{S(0,2)}(f) = 5.$$

Provjerimo još ima li p nultočaka na $S(0, 1)$. Dokazat ćemo da nema. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji neki $z \in S(0, 1)$ takav da $p(z) = 0$. Tada mora biti $z^5 + 5z = 1$, pa onda i

$$1 = |z^5 + 5z| \geq |5z| - |z^5| = 5 - 1 = 4,$$

što je kontradikcija.

Dakle, broj nultočaka u $V(0, 1, 2)$ je $5 - 1 - 0 = 4$.

□

Zadatak 3.3.4. Odredite broj nultočaka polinoma $p(z) = z^4 - z^2 + 1$ u desnoj poluravnini.

Rješenje. Pronaći ćemo $R > 0$ dovoljno velik tako da sve nultočke od p budu unutar $K(0, R)$ i pronaći ćemo f i g takve da možemo primijeniti Rouchéov teorem na putu Γ sastavljenom od desne polukružnice radijusa R i dužine $[-iR, iR]$.

Uzmimo

$$f(z) = z^4 + 1, \ g(z) = -z^2.$$

Imamo $|f(z)| \geq |z|^4 - 1$. Uzmimo dovoljno veliki R takav da vrijedi $R^2 < R^4 - 1$ i da su sve nultočke od p unutar $K(0, R)$. Vidimo da zbog izbora R vrijedi da je $|g(z)| < |f(z)|$ za $z \in S(0, R)$. Za $z \in [-iR, iR]$ možemo pisati $z = iy, \ y \in [-R, R]$, i tada je

$$|f(z)| - |g(z)| = y^4 + 1 - y^2 = \left(y^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Dakle, $|g(z)| < |f(z)|$ za $z \in \Gamma$. Nultočke funkcije f su četvrti korijeni iz -1 i od toga su dva unutar Γ. Dakle, p ima dvije nultočke u desnoj poluravnini. □

3.2 Računanje integrala funkcija realne varijable pomoću reziduuma

Zadatak 3.4.1. Izračunajte integral

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

Rješenje. Funkcija pod integralom je parna funkcija, pa je

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

Funkcija f ima singularitete $\pm i$ koji se ne nalaze na realnoj osi, a i je u gornjoj poluravnini. Oni su polovi drugog reda. Za $z \in C_R$ vrijedi

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2 + 1|^2} \leq \frac{1}{(|z|^2 - 1)^2} = \frac{1}{(R^2 - 1)^2}.$$

Dakle, imamo $M(R) \leq (R^2 - 1)^{-2}$, pa budući da $R \cdot M(R) \to 0$ kad $R \to \infty$, možemo primijeniti Jordanovu lemu:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \operatorname{res}(f, i) \\
&= \pi i \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \left((z - i)^2 \frac{1}{(z^2 + 1)^2} \right) \\
&= \pi i \lim_{z \to i} \frac{-2}{(z + i)^3} \\
&= \pi i \frac{-2}{-8i} \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

□

Zadatak 3.4.2. Izračunajte integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + b^2}\, dx, \quad b > 0.$$

Rješenje. Stavimo

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + b^2}.$$

Singulariteti su $\pm bi$, od kojih se bi nalazi u gornjoj poluravnini. To su polovi prvog reda. Za $z \in C_R$ vrijedi

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2 + b^2|} \le \frac{1}{R^2 - b^2},$$

iz čega slijedi

$$\max_{|z|=R} |f(z)| \le \frac{1}{R^2 - b^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0,$$

pa su uvjeti Jordanove leme ispunjeni. Računamo, uz oznaku $F(z) = e^{iz} f(z)$,

$$I = \operatorname{Re}\left(2\pi i \operatorname{res}(F, bi)\right) = \operatorname{Re}\left(2\pi i \frac{e^{iz}}{2z}\Big|_{z=bi}\right) = \frac{\pi}{b} e^{-b}.$$

□

Zadatak 3.4.3. Izračunajte integral

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1}\, dx.$$

Rješenje. Funkcija pod integralom je parna, pa je

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1}\, dx.$$

Stavimo

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}.$$

Singulariteti te funkcije su $\pm i$ od kojih i leži u gornjoj poluravnini. To su polovi prvog reda. Računamo

$$\max_{|z|=R} |f(z)| = \max_{|z|=R} \frac{|z|}{|z^2 + 1|} \le \frac{R}{R^2 - 1} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Uvjeti Jordanove leme su ispunjeni. Stavimo $F(z) = e^{iz} f(z)$ i računamo

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left(2\pi i \operatorname{res}(F, i)\right) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left(2\pi i \frac{z e^{iz}}{2z}\Big|_{z=i}\right) = \frac{\pi}{2e}.$$

□