

KOMPLEKSNA ANALIZA

1. ispitni rok – 17. lipnja 2024.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta.

Zadatak 1. (14 bodova) Definirajte pojam primitivne funkcije. Iskažite Cauchy-ev teorem za zvjezdast skup. Primijenite taj teorem da odredite primitivnu funkciju od $1/z$ na skupu koji se dobije kada se iz $\mathbb{C}$ izbac $< -\infty, 0]$.

KOMPLEKSNA ANALIZA

1. ispitni rok – 17. lipnja 2024.

Zadatak 2. (14 bodova) Definirajte gomilište skupa. Iskažite princip jedinstvenosti za holomorfne funkcije. Koristeći princip jedinstvenosti dokažite da vrijedi $\cos(2z) = 2\cos^2(z) - 1$ za svaki $z \in \mathbb{C}$.

KOMPLEKSNA ANALIZA

1. ispitni rok – 17. lipnja 2024.

Zadatak 3. (14 bodova)

- (a) Odredite sve holomorfne funkcije $f = u + iv : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ takve da $\operatorname{Im} f$ je imaginarni dio zadan formulom

$$v(x, y) = e^{-y} \sin(x) + e^y \sin(-x).$$

- (b) Neka je α proizvoljan realan broj. Dokažite da je funkcija $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $F(z) = z + \alpha \bar{z}$ holomorfna ako i samo ako je $\alpha = 0$.

KOMPLEKSNA ANALIZA

1. ispitni rok – 17. lipnja 2024.

Zadatak 4. (14 bodova)

(a) Razvijte funkciju

$$e^{\frac{1}{z}} + \frac{\sin(z)}{z^2}$$

u Laurentov red oko točke nula na probušenom krugu oko točke nula radijusa 1. Nadalje, odredite vrstu singulariteta u 0 te reziduum promatrane funkcije u 0.

(b) Koristeći razvoj u Taylorov red, dokažite da su sve kompleksne derivacije neparnog reda funkcije $\sin(z^2)$ u točki 0 jednake 0.

KOMPLEKSNA ANALIZA

1. ispitni rok – 17. lipnja 2024.

Zadatak 5. (7 bodova) Koristeći se metodama kompleksne analize, izračunajte integrale:

(a)

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z^2 + 9} dz,$$

gdje je Γ pozitivno orijentirana kružnica radijusa 5 sa središtem u 0.

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^3} dx.$$