JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi ispit (nastavnički smjer) – 16. lipnja 2025.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.
Vrijeme rješavanja je 120 minuta.

Zadatak 1. (14 bodova) Zadana je funkcija $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ formulom

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

(a) Dokažite da je u harmonijska funkcija na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(b) Odredite sve holomorfne funkcije $f = u+iv : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ te ih zapišite kao funkcije u varijabli $z = x+iy$.

Rješenje 1.

(a) Računamo:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x}(x,y) = \frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3},$$

odnosno

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-2x^3+6xy^2}{(x^2+y^2)^3}.$$

Iz dobivenih izraza zaključujemo da je $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. Imamo

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

Dakle, u je harmonijska.

(b) Ako je u realni dio neke holomorfne funkcije f, onda moraju vrijediti C-R uvjeti, odakle dobivamo:

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Integriranjem druge jednadžbe po x (uz zamjenu varijabli $t = x^2+y^2$) dobivamo

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + C(y),$$

a zatim deriviranjem dobivene jednadžbe po y i izjednačavanjem s izrazom dobivenim C-R uvjetom imamo

$$C'(y) = 0,\ \text{odnosno } C(y) = D \text{ za neki } D \in \mathbb{R}.$$

Dakle,

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + i(-\frac{y}{x^2+y^2} + D)$$

odnosno

$$f(z) = \frac{\overline{z}}{|z|^2} + iD = \frac{1}{z} + iD,\ D \in \mathbb{R}.$$

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi ispit (nastavnički smjer) – 16. lipnja 2025.

Zadatak 2. (14 bodova) Riješite jednadžbu

$$\cos^2 z - \sin^2 z = 2$$

u skupu kompleksnih brojeva.

Rješenje 2.

$$\cos^2 z - \sin^2 z = 2 \iff \cos(2z) = 2 \iff \frac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{2} = 2$$

$$\iff e^{4iz} - 4e^{2iz} + 1 = 0.$$

Uvodimo supstituciju $w := e^{2iz}$. Sada je

$$w^2 - 4w + 1 = 0,$$

odakle je

$$w_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Dakle,

$$e^{2iz} = 2 \pm \sqrt{3} \iff 2iz \in Ln(2 \pm \sqrt{3}) = \ln_{\mathbb{R}} |2 \pm \sqrt{3}| + iArg(2 \pm \sqrt{3}).$$

Konačno,

$$iz \in \left\{ k\pi i + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3}) : k \in Z \right\} \cup \left\{ k\pi i + \frac{1}{2}\ln(2-\sqrt{3}) : k \in Z \right\}$$

stoga je

$$z \in \left\{ k\pi - \frac{i}{2}\ln(2+\sqrt{3}) : k \in Z \right\} \cup \left\{ k\pi i - \frac{i}{2}\ln(2-\sqrt{3}) : k \in Z \right\}.$$

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi ispit (nastavnički smjer) – 16. lipnja 2025.

Zadatak 3. (14 bodova) Zadana je funkcija

$$f(z) = \frac{z^2+2}{(z+2)^2(z-4)} \cos\left(\frac{1}{z-2}\right).$$

(a) Odredite singularitete funkcije f te ispitajte njihov karakter. Za polove (ako isti postoje) odredite red.

(b) Koristeći teorem o reziduumima izračunajte integral

$$\int_\Gamma f(z)\, dz,$$

pri čemu je Γ pozitivno orijentirana kružnica oko 0 polumjera 3.

Rješenje 3.

(a) Signulariteti funkcije f su $z = 4$, $z = 2$ i $z =$ -2. Očito su svi izolirani. Klasificirajmo ih:

- $(z+2)^2|_{z=-2} = 0$, $((z+2)^2)'|_{z=-2} = (2(z+2))|_{z=-2} = 0$, $((z+2)^2)''|_{z=-2} \neq 0$
  $\implies$ -2 je nultočka drugog reda funkcije $z \mapsto (z+2)^2$
  $\implies$ -2 je pol drugog reda funkcije $z \mapsto \frac{1}{(z+2)^2}$.
  Jer je funkcija $z \mapsto \frac{z^2+2}{(z-4)} \cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$ holomorfna u -2 te je njena evaluacija u tim točkama različita od nule, prema tvrdnji s vježbi (2.6.3) zaključujemo da je -2 pol 2. reda funkcije f.
- $(z-4)|_{z=4} = 0$, $((z-4))'|_{z=4} \neq 0$
  $\implies$ 4 je nultočka prvog reda funkcije $z \mapsto (z-4)$
  $\implies$ 4 je pol prvog reda funkcije $z \mapsto \frac{1}{(z-4)}$.
  Jer je funkcija $z \mapsto \frac{z^2+2}{(z+2)^2} \cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$ holomorfna u 4 te je njena evaluacija u toj točki različita od nule, prema tvrdnji s vježbi (2.6.3) zaključujemo da je 4 pol 1. reda funkcije f.
- Funkcija $z \mapsto \cos(z)$ je holomorfna na $\mathbb{C}$ i vrijedi $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$. Odavde je funkcija $z \mapsto \cos(\frac{1}{z-2})$ holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \{2\}$ i vrijedi $\cos(\frac{1}{z-2}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{(z-2)^{2n}}$. Direktno iz Laurentovog reda iščitavamo da je 2 bitan singularitet funkcije $z \mapsto \cos(\frac{1}{z-2})$.
  Ponovno, jer je funkcija $z \mapsto \frac{z^2+2}{(z+2)^2(z-4)}$ holomorfna u 2 te je njena evaluacija u toj točki različita od nule, prema spomenutoj tvrdnji s vježbi zaključujemo da je 2 bitan singularitet funkcije f.

(b) Prema (a) je 2 bitan singularitet funkcije f (koji se ujedno nalazi unutar $S(0,3)$), stoga je prirodno pokušati izračunati integral koristeći reziduume u singularitetima koji se nalaze izvan $S(0,3)$. Računamo:

$$f_1(z) = f(\frac{1}{z}) = \frac{\frac{1}{z^2}+2}{(\frac{1}{z}+2)^2(\frac{1}{z}-4)} \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{z}-2}\right) = \frac{z(1+2z^2)}{(1+2z)^2(1-4z)} \cos\left(\frac{z}{1-2z}\right).$$

Očito je $\lim_{z\to 0} f_1(z) = 0$, stoga zaključujemo da je f analitička u beskonačnosti. Sada je

$$Res(f,\infty) = \lim_{z\to+\infty} z(f(\infty)-f(z)) = -\lim_{z\to+\infty} \frac{z(z^2+2)}{(z+2)^2(z-4)} \cos\left(\frac{1}{z-2}\right) = -1.$$

Nadalje,

$$Res(f,4) = \lim_{z\to 4}(z-4)f(z) = \lim_{z\to 4} \frac{z^2+2}{(z+2)^2} \cos\left(\frac{1}{z-2}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\right).$$

Koristeći teorem o reziduumima i relaciju za sumu reziduuma dobivamo

$$\int_\Gamma \frac{z^2+2}{(z+2)^2(z-4)} \cos\left(\frac{1}{z-2}\right) dz = -2\pi i(Res(f,\infty)+Res(f,4)) = 2\pi i - \pi i \cos\left(\frac{1}{2}\right).$$

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi ispit (nastavnički smjer) – 16. lipnja 2025.

Zadatak 4. (14 bodova) Odredite broj nultočaka funkcije

$$h(z) = z^4 - z^3 - 4z + 1$$

unutar $V(0; 1, 3)$, pritom računajući njihove kratnosti.

Rješenje 4. Odredit ćemo broj $N_{S(0,1)}(h)$ nultočaka funkcije h unutar $S(0, 1)$, zatim broj $N_{S(0,3)}(h)$ istih unutar $S(0, 3)$, a potom od $N_{S(0,3)}(h)$ oduzeti $N_{S(0,1)}(h)$ i broj nultočaka funkcije h na $S(0, 1)$.

- Uzmimo $f(z) = -4z,\ g(z) = z^4 - z^3 + 1$. Očito je $h = f + g$. Nadalje, za $z \in S(0, 1)$ vrijedi

  $$|f(z)| = 4|z| = 4,\ |g(z)| = |z^4 - z^3 + 1| \leq |z|^4 + |z|^3 + 1 = 3.$$

  Dakle, za sve $z \in S(0, 1)$ vrijedi $|g(z)| < |f(z)|$, stoga iz Rouchéovog teorema slijedi $N_{S(0,1)}(h) = N_{S(0,1)}(f) = 1$.

- Uzmimo $f(z) = z^4,\ g(z) = -z^3 - 4z + 1$. Očito je $h = f + g$. Nadalje, za $z \in S(0, 3)$ vrijedi

  $$|f(z)| = |z|^4 = 81,\ |g(z)| = |-z^3 - 4z + 1| \leq |z|^3 + 4|z| + 1 = 40.$$

  Dakle, za sve $z \in S(0, 3)$ vrijedi $|g(z)| < |f(z)|$, stoga iz Rouchéovog teorema slijedi $N_{S(0,1)}(h) = N_{S(0,1)}(f) = 4$.

- Ima li h nultočaka na $S(0, 1)$? Pretpostavimo da ima, tj. da je $h(z) = 0$ za neki $z \in S(0, 1)$. Tada je

  $$z^4 - z^3 - 4z = -1.$$

  Međutim, tada je

  $$1 = |-1| = |z^4 - z^3 - 4z| \geq 4|z| - |z|^3 - |z|^4 = 4 - 1 - 1 = 2,$$

  što je kontradikcija. Dakle,

  $$N_{V(0;1,3)}(h) = N_{S(0,3)}(h) - N_{S(0,1)}(h) = 4 - 1 = 3.$$

JMBAG　　　IME I PREZIME　　　BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi ispit (nastavnički smjer) – 16. lipnja 2025.

Zadatak 5. (14 bodova) Izračunajte integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^5+3x^3+2x}\mathrm{d}x.$$

Rješenje 5. Označimo gornji integral s I i stavimo

$$f(z) := \frac{1}{z^5+3z^3+2z}.$$

Označimo

$$F(z) := f(z)e^{2iz}.$$

Singulariteti funkcije f su $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_1 = -i$, $z_4 = i\sqrt{2}$ i $z_5 = -i\sqrt{2}$. Primijetimo da je z_1 na realnoj osi, dok su z_2 i z_4 u gornjoj poluravnini (svi singulariteti su polovi 1. reda). Za $|z| = R$ (gdje je R *dovoljno* velik) vrijedi

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^5+3z^3+2z|} \leq \frac{1}{|z|^5-3|z|^3-2|z|} = \frac{1}{R^5-R^3-R} =: M(R).$$

Očito $M(R) \to 0$ kada $R \to \infty$, stoga prema Jordanovoj lemi vrijedi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x = 2\pi i\ (res(F, z_2) +\ res(F, z_4)) + \pi i\ res(F, z_1).$$

Računamo

- $res(F, i) = \frac{e^{2iz}}{(z^5+3z^3+2z)'}|_{z=i} = -\frac{e^{-2}}{2}$,
- $res(F, i\sqrt{2}) = \frac{e^{2iz}}{(z^5+3z^3+2z)'}|_{z=i\sqrt{2}} = \frac{e^{-2\sqrt{2}}}{4}$,
- $res(F, 0) = \frac{e^{2iz}}{(z^5+3z^3+2z)'}|_{z=0} = \frac{1}{2}$.

Kako je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{(x^5+3x^3+2x)}\mathrm{d}x = Im\left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x\right),$$

uvrštavanjem dobivamo $I = \pi\left(-e^{-2} + \frac{e^{-2\sqrt{2}}}{2} + \frac{1}{2}\right)$.