JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi kolokvij (nastavnički smjer) – 16. lipnja 2025.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.
Vrijeme rješavanja je 120 minuta.

Zadatak 1. (7 bodova) Odredite Laurentov razvoj funkcije

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^5(z^2+1)}$$

oko točke $z_0 = 1$ u području D koje sadrži 2.

Rješenje 1. Funkcija f je holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \{1, i, -i\}$. Određujemo udaljenosti od z_0 do singulariteta i točke 2:

- $|z_0 - i| = |1 - i| = \sqrt{2}$,
- $|z_0 + i| = |1 + i| = \sqrt{2}$,
- $|z_0 - 2| = |1 - 2| = 1$.

Dakle, područje D na kojem je f holomorfna te $2 \in D$ jest $V(1; 0, \sqrt{2})$ (može se raditi i s podskupovima ovog područja koji sadrže 2). Primijetimo da za $z \in D$ vrijedi

$$|z-1| < \sqrt{2} \iff \frac{|z-1|}{\sqrt{2}} < 1.$$

Računamo

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i}\frac{(z+i)-(z-i)}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right).$$

Nadalje,

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z-1+1-i} = \frac{1}{1-i}\frac{1}{1+\frac{z-1}{1-i}} = (|1-i| = \sqrt{2}) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^n}{(1-i)^{n+1}},$$

odnosno

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-1+1+i} = \frac{1}{1+i}\frac{1}{1+\frac{z-1}{1+i}} = (|1+i| = \sqrt{2}) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^n}{(1+i)^{n+1}}.$$

Sada je,

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^5(z^2+1)} = \frac{1}{(z-1)^5}\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^n}{(1-i)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^n}{(1+i)^{n+1}}\right),$$

odakle je konačno

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2i}\left(\frac{1}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right)(z-1)^{n-5}.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi kolokvij (nastavnički smjer) – 16. lipnja 2025.

Zadatak 2. (7 bodova) Odredite singularitete funkcije

$$f(z) = \frac{\sin(\frac{1}{z-4})}{(z-5)^2(2-\cos(z))}$$

te ispitajte njihov karakter. Za polove (ako isti postoje) odredite red.

Rješenje 2. Singulariteti funkcije f su $z = 4$, $z = 5$ te rješenja jednadžbe $\cos(z) = 2$.

$$\cos(z) = 2 \iff \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$$
$$\iff e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0.$$

Sada možemo ili nadopuniti do potpunog kvadrata ili uvesti supstituciju $w := e^{iz}$. Sada je

$$w^2 - 4w + 1 = 0,$$

odakle je

$$w_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Dakle,

$$e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3} \iff iz \in Ln(2 \pm \sqrt{3}) = \ln_{\mathbb{R}} |2 \pm \sqrt{3}| + iArg(2 \pm \sqrt{3}).$$

Konačno,

$$z_k \in \left\{2k\pi - i\ln(2+\sqrt{3}) : k \in Z\right\} \cup \left\{2k\pi - i\ln(2-\sqrt{3}) : k \in Z\right\}.$$

Iz dobivenog je očito da su 4, 5 te z_k, $k \in \mathbb{Z}$ izolirani singulariteti funkcije f. Odredimo njihov karakter:

- $(2-\cos(z))|_{z=z_k} = 0$, $(2-\cos(z))'|_{z=z_k} = (\sin(z))|_{z=z_k} \neq 0$
  $\implies$ z_k su nultočke prvog reda funkcije $z \mapsto 2-\cos(z)$
  $\implies$ z_k su polovi prvog reda funkcije $z \mapsto \frac{1}{2-\cos(z)}$.

  Jer je funkcija $z \mapsto \frac{\sin(\frac{1}{z-4})}{(z-5)^2}$ holomorfna u z_k te je njena evaluacija u tim točkama različita od nule, prema tvrdnji s vježbi (2.6.3) zaključujemo da su z_k, $k \in \mathbb{Z}$ polovi 1. reda funkcije f.

- $(z-5)^2|_{z=5} = 0$, $((z-5)^2)'|_{z=5} = (2(z-5))|_{z=5} = 0$,
  $((z-5)^2)''|_{z=5} \neq 0$
  $\implies$ 5 je nultočka drugog reda funkcije $z \mapsto (z-5)^2$
  $\implies$ 5 je pol drugog reda funkcije $z \mapsto \frac{1}{(z-5)^2}$.

  Jer je funkcija $z \mapsto \frac{\sin(\frac{1}{z-4})}{2-\cos(z)}$ holomorfna u 5 te je njena evaluacija u toj točki različita od nule, prema tvrdnji s vježbi (2.6.3) zaključujemo da je 5 pol 2. reda funkcije f.

- Funkcija $z \mapsto \sin(z)$ je holomorfna na $\mathbb{C}$ i vrijedi $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$. Odavde je funkcija $z \mapsto \sin(\frac{1}{z-4})$ holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \{4\}$ i vrijedi $\sin(\frac{1}{z-4}) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-4)^{2n+1}}$. Direktno iz Laurentovog reda iščitavamo da je 4 bitan singularitet funkcije $z \mapsto \sin(\frac{1}{z-4})$.
  Ponovno, jer je funkcija $z \mapsto \frac{1}{(z-5)^2(2-\cos(z))}$ holomorfna u 4 te je njena evaluacija u toj točki različita od nule, prema spomenutoj tvrdnji s vježbi zaključujemo da je 4 bitan singularitet funkcije f.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi kolokvij (nastavnički smjer) – 16. lipnja 2025.

Zadatak 3. (7 bodova) Koristeći teorem o reziduumima izračunajte integral

$$\int_\Gamma \frac{dz}{(z-1)(z^2+1)(z^2-9)},$$

pri čemu je Γ pozitivno orijentirana kružnica oko 0 polumjera 2.

Napomena. Nije potrebno eksplicitno ispitivati karakter singulariteta u kojima računate reziduume; dovoljno je naznačiti o kojem se tipu singulariteta radi.

Rješenje 3. (Izolirani) singulariteti funkcije

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+1)(z^2-9)}$$

su $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -i, z_4 = 3, z_5 = -3$. Uočavamo da se z_1, z_2 i z_3 nalaze u unutrašnjosti $S(0,2)$, dok se z_4 i z_5 nalaze izvan iste.
Zadatak možemo riješiti na dva načina:

- unutrašnjost: z_1, z_2 i z_3 su polovi prvog reda funkcije f. Računamo pripadne reziduume:
  - $Res(f,1) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{(z-1)(z^2+1)(z^2-9)} = -\frac{1}{16}$,
  - $Res(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z-1)(z-i)(z+i)(z^2-9)} = \frac{1}{40} - \frac{i}{40}$,
  - $Res(f,-i) = \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{1}{(z-1)(z-i)(z+i)(z^2-9)} = \frac{1}{40} + \frac{i}{40}$.

  Teorem o reziduumima daje

  $$\int_\Gamma \frac{dz}{(z-1)(z^2+1)(z^2-9)} = 2\pi i(Res(f,1) + Res(f,i) + Res(f,-i)) = -\frac{\pi i}{40}.$$

- vanjština: z_4 i z_5 su polovi prvog reda funkcije f. Promatramo funkciju

  $$f_1(z) = f(\frac{1}{z}) = \frac{1}{(\frac{1}{z}-1)(\frac{1}{z^2}+1)(\frac{1}{z^2}-9)} = \frac{z^5}{(1-z)(1+z^2)(1-9z^2)}.$$

  Očito je $\lim_{z\to 0} f_1(z) = 0$, stoga zaključujemo da je f analitička u beskonačnosti. Sada je

  $$Res(f,\infty) = \lim_{z\to+\infty} z(f(\infty) - f(z)) = -\lim_{z\to+\infty}\frac{z}{(z-1)(z^2+1)(z^2-9)} = 0.$$

  Nadalje,

  $$Res(f,3) = \lim_{z\to 3}(z-3)f(z) = \lim_{z\to 3}(z-3)\frac{1}{(z-1)(z^2+1)(z^2-9)} = \frac{1}{120},$$

  $$Res(f,-3) = \lim_{z\to -3}(z+3)f(z) = \lim_{z\to -3}(z+3)\frac{1}{(z-1)(z^2+1)(z^2-9)} = \frac{1}{240}.$$

  Koristeći teorem o reziduumima i relaciju za sumu reziduuma dobivamo

  $$\int_\Gamma \frac{dz}{(z-1)(z^2+1)(z^2-9)} = -2\pi i(Res(f,\infty) + Res(f,3) + Res(f,-3)) = -\frac{\pi i}{40}.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi kolokvij (nastavnički smjer) – 16. lipnja 2025.

Zadatak 4. (7 bodova) Odredite broj nultočaka funkcije

$$p(z) = 3z^5 + 7z^2 + 2z + 1$$

(a) unutar $K(0,1)$,

(b) unutar $K(0,2)$,

(c) izvan $K(0,2)$,

računajući njihove kratnosti.

Rješenje 4.

(a) Uzmimo $f(z) = 7z^2$, $g(z) = 3z^5 + 2z + 1$. Očito je $p = f + g$. Nadalje, za $z \in S(0,1)$ vrijedi

$$|f(z)| = 7|z|^2 = 7, \ |g(z)| = |3z^5 + 2z + 1| \leq 3|z|^5 + 2|z| + 1 = 6.$$

Dakle, za sve $z \in S(0,1)$ vrijedi $|g(z)| < |f(z)|$, stoga iz Rouchéovog teorema slijedi $N_{S(0,1)}(p) = N_{S(0,1)}(f) = 2$.

(b) Uzmimo $f(z) = 3z^5$, $g(z) = 7z^2 + 2z + 1$. Očito je $p = f + g$. Nadalje, za $z \in S(0,2)$ vrijedi

$$|f(z)| = 3|z|^5 = 96, \ |g(z)| = |7z^2 + 2z + 1| \leq 7|z|^2 + 2|z| + 1 = 33.$$

Dakle, za sve $z \in S(0,2)$ vrijedi $|g(z)| < |f(z)|$, stoga iz Rouchéovog teorema slijedi $N_{S(0,2)}(p) = N_{S(0,2)}(f) = 5$.

(c) Budući da je p polinom petog stupnja, po osnovnom teoremu algebre znamo da on ima točno pet nultočaka u kompleksnoj ravnini. Kako smo u (b) dijelu zadatka pokazali da se svih pet nultočaka nalaze unutar $K(0,2)$ zaključujemo da se izvan te kugle ne nalazi niti jedna nultočka od p.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi kolokvij (nastavnički smjer) – 16. lipnja 2025.

Zadatak 5. (7 bodova) Izračunajte integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Rješenje 5. Označimo gornji integral s I i stavimo

$$f(z) := \frac{1}{z^2+z+1}.$$

Singulariteti funkcije f su $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ i $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Primijetimo da se z_1 nalazi u gornjoj poluravnini te da f nema singulariteta na realnoj osi.
Za $|z| = R$ (gdje je R *dovoljno* velik) imamo

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2+z+1|} \leq \frac{1}{|z|^2-|z|-1} = \frac{1}{R^2-R-1}.$$

Stavimo

$$M(R) := \frac{1}{R^2-R-1}.$$

Vrijedi

$$\lim_{R\to\infty} R\cdot M(R) = \lim_{R\to\infty} \frac{R}{R^2-R-1} = 0,$$

stoga prema Jordanovoj lemi imamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = 2\pi i\; res(f, z_1).$$

Jer je z_1 pol prvog reda, a f-ju f možemo napisati kao $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, pri čemu su $g(z) = 1$ i $h(z) = z^2+z+1$ holomorfne te je $h'(z_1) = 2z_1+1 \neq 0$, dobivamo da je

$$res(f, z_1) = \frac{g(z_1)}{h'(z_1)} = -\frac{i\sqrt{3}}{3},$$

stoga je $I = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.