JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi kolokvij (nastavnički smjer) – 22. travnja 2025.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.
Vrijeme rješavanja je 120 minuta.

Zadatak 1. (7 bodova)

(a) Odredite sve vrijednosti korijena

$$\sqrt[4]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}.$$

(b) Odredite sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{4}.$$

Skup rješenja skicirajte u kompleksnoj ravnini.

Rješenje 1.

(a) Označimo $z := -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Zapisujemo z u trigonometrijskom obliku:

$$r=\sqrt{(\mathrm{Re}z)^2+(\mathrm{Im}z)^2}=1, \quad \mathrm{tg}(\varphi)=\frac{\mathrm{Im}z}{\mathrm{Re}z}=-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\mathrm{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right),$$

odakle slijedi da je $\varphi \in \{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$. Iz algebarskog zapisa kompleksnog broja z iščitavamo da se isti nalazi u 2. kvadrantu, stoga je $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

Preostaje primijeniti formulu za računanje n-tih korijena kompleksnog broja z, odakle (za $n=4$) dobivamo

- $k=0 \implies z_0=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$,
- $k=1 \implies z_1=\cos\left(\frac{4\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{6}\right)$,
- $k=2 \implies z_2=\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$,
- $k=3 \implies z_3=\cos\left(\frac{10\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{10\pi}{6}\right)$,

što su upravo traženi kompleksni brojevi.

(b) $\left\{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}\right\} = \left\{x + iy \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}\left(\frac{1}{x+iy}\right) = \frac{1}{4}\right\} =$
$\left\{x + iy \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{4}\right\} = \left\{x + iy \in \mathbb{C} : \ -\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{4}\right\} =$
$\left\{x + iy \in \mathbb{C} : \ x^2 + y^2 = -4y, \ x^2 + y^2 \neq 0\right\} =$

$\left\{x + iy \in \mathbb{C} : \ x^2 + (y+2)^2 = 4\right\} \setminus \{0 + 0i\}$

Dakle, traženi skup je kružnica k sa središtem u z = -2i i polumjerom r = 2 iz koje isključujemo ishodište.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi kolokvij (nastavnički smjer) – 22. travnja 2025.

Zadatak 2. (7 bodova)

(a) Odredite sve holomorfne funkcije $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ takve da im je realni dio zadan formulom

$$u(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y$$

te ih zapišite kao funkcije u varijabli $z = x + iy$.

(b) Dokažite da ne postoji holomorfna funkcija $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ takva da joj je realan dio zadan formulom

$$u(x, y) = 3x^2 - y^2 + 3x + y.$$

Rješenje 2.

(a) Uočimo da je $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Ako tražena funkcija f postoji, prema korolaru Teorema o Cauchy - Riemannovim uvjetima (vježbe) slijedi da u nužno mora biti harmonijska funkcija. Računamo pripadne parcijalne derivacije:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = -\sin x \operatorname{ch} y,$$

odnosno

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y,$$

odakle slijedi

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Dakle, u je harmonijska. Nadalje, ako je u realni dio neke holomorfne funkcije f, onda moraju vrijediti C-R uvjeti, odakle dobivamo:

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y,\ \ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\sin x \operatorname{sh} y.$$

Integriranjem prve jednadžbe po y dobivamo

$$v(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y + C(x),$$

a zatim deriviranjem dobivene jednadžbe po x i izjednačavanjem s izrazom dobivenim C-R uvjetom imamo

$$C'(x) = 0,\ \text{odnosno } C(x) = D \text{ za neki } D \in \mathbb{R}.$$

Dakle,

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y + iD$$

odnosno

$$f(z) = \sin z + iD,\ \ D \in \mathbb{R}.$$

(b) Uočimo ponovno da je $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Želimo li pokazati da tražena funkcija ne postoji, dovoljno je pokazati da u nije harmonijska. Računamo parcijalne derivacije:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 6x + 3,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = 6,$$

odnosno

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2y + 1,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = -2,$$

odakle slijedi

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 4 \neq 0.$$

Dakle, u nije harmonijska, pa prema spomenutom korolaru možemo zaključiti da takva funkcija f ne postoji.

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi kolokvij (nastavnički smjer) – 22. travnja 2025.

Zadatak 3. (7 bodova) U skupu kompleksnih brojeva riješite jednadžbu

$$2\sin z + 3i\cos z = 5i.$$

Rješenje 3.

$$2\sin z + 3i\cos z = 5i \iff 2\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} + 3i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 5i$$
$$\iff 2e^{iz} - 2e^{-iz} - 3e^{iz} - 3e^{-iz} = -10$$
$$\iff e^{2iz} - 10e^{iz} + 5 = 0.$$

Sada možemo ili nadopuniti do potpunog kvadrata ili uvesti supstituciju $w := e^{iz}$. Sada je

$$w^2 - 10w + 5 = 0,$$

odakle je

$$w_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-20}}{2} = \frac{10 \pm 4\sqrt{5}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{5}.$$

Dakle,

$$e^{iz} = 5 \pm 2\sqrt{5} \iff iz \in Ln(5 \pm 2\sqrt{5}) = \ln_{\mathbb{R}}|5 \pm 2\sqrt{5}| + iArg(5 \pm 2\sqrt{5}).$$

Konačno,

$$iz \in \left\{\ln\left(5 + 2\sqrt{5}\right) + 2k\pi i : k \in Z\right\} \cup \left\{\ln\left(5 - 2\sqrt{5}\right) + 2k\pi i : k \in Z\right\}$$

stoga je

$$z \in \left\{2k\pi - i\ln\left(5 + 2\sqrt{5}\right) : k \in Z\right\} \cup \left\{2k\pi - i\ln\left(5 - 2\sqrt{5}\right) : k \in Z\right\}.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi kolokvij (nastavnički smjer) – 22. travnja 2025.

Zadatak 4. (7 bodova) Neka je Γ neka pozitivno orijentirana kontura u čijoj se unutrašnjosti nalaze točke $z =$ -2 i $z = i$, a točka $z = 1$ se nalazi izvan iste. Izračunajte integral

$$\int_\Gamma \frac{dz}{(1-z)(z+2)(z-i)^2}$$

Rješenje 4. Uočimo da u ovoj konfiguraciji ne možemo direktno primijeniti teorem s vježbi. Naime, ako bismo definirali funkciju f kao

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(z+2)}$$

onda ona ne bila holomorfna u unutrašnjosti Γ. Analogno obrazloženje imamo u slučaju

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(z-i)^2}.$$

Međutim, ako pomoću Γ definiramo konture Γ_1 i Γ_2 kao na slici niže, onda vrijedi

$$\int_\Gamma \frac{dz}{(1-z)(z+2)(z-i)^2} = \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{(1-z)(z+2)(z-i)^2} + \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{(1-z)(z+2)(z-i)^2},.$$

Definirajmo

$$f_1(z) = \frac{1}{(1-z)(z+2)}.$$

Uočimo da vrijedi

$$\frac{f_1(z)}{(z-i)^2} = \frac{1}{(1-z)(z+2)(z-i)^2}.$$

Budući da je f_1 holoformna na unutrašnjosti Γ_1 te se $z = i$ nalazi u unutrašnjosti Γ_1, prema teoremu je

$$I_1 := \int_{\Gamma_1} \frac{f_1(z)}{(z-i)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f_1'(i).$$

Imamo

$$f_1'(z) = \left[\frac{1}{-z^2-z+2}\right]' = \frac{2z+1}{(-z^2-z+2)^2},$$

stoga je

$$f_1'(i) = \frac{2i+1}{(-i^2-i+2)^2} = \frac{2i+1}{8-6i}\,\frac{8+6i}{8+6i} = \frac{22i-4}{100},$$

pa je

$$I_1 = 2\pi i\,\frac{22i-4}{100} = \frac{-11\pi-2\pi i}{25}.$$

Nadalje, neka je

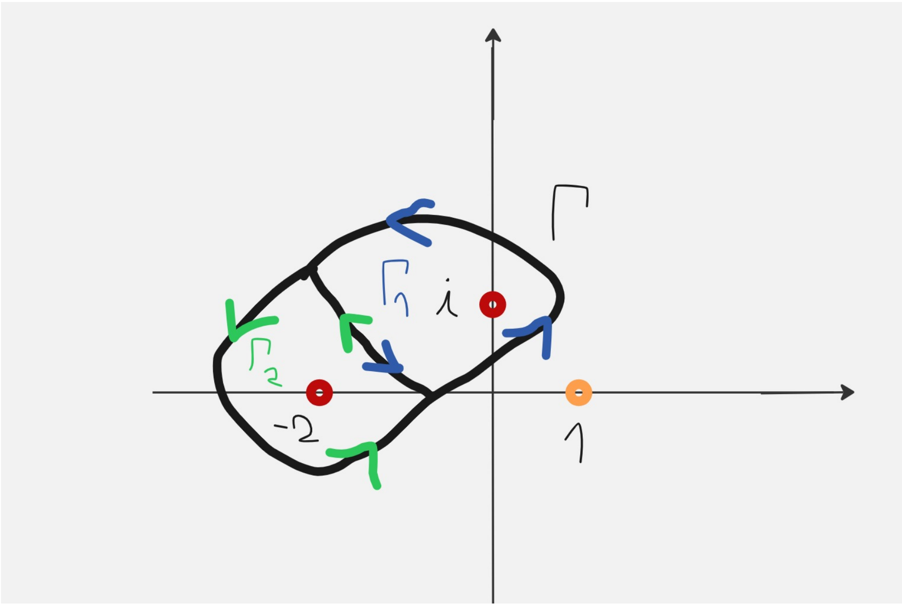
$$f_2(z) = \frac{1}{(1-z)(z-i)^2}.$$

Kako je f_2 holomorfna u unutrašnjosti Γ_2 te se $z = -2$ nalazi u unutrašnjosti Γ_2, prema teoremu je

$$I_2 := \int_{\Gamma_2} \frac{f_2(z)}{z+2} dz = 2\pi i f_2(-2) = \frac{2\pi i}{(1+2)(-2-i)^2} = \frac{2\pi i}{3} \, \frac{3-4i}{25} = \frac{6\pi i + 8\pi}{75}.$$

Konačno je

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{(1-z)(z+2)(z-i)^2} = I_1 + I_2 = \frac{-11\pi - 2\pi i}{25} + \frac{6\pi i + 8\pi}{75} = -\frac{\pi}{3}.$$



JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi kolokvij (nastavnički smjer) – 22. travnja 2025.

Zadatak 5. (7 bodova) Razvijte funkciju

$$f(z) = e^{3iz} \sin z$$

u Taylorov red oko točke $z_0 = \frac{\pi}{3}$. Odredite područje konvergencije dobivenog reda.

Rješenje 5. Koristimo definiciju $\sin z$:

$$f(z) = e^{3iz} \sin z = e^{3iz} \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) = \frac{1}{2i} \left(e^{4iz} - e^{2iz} \right).$$

Budući da želimo razvoj oko točke $z_0 = \frac{\pi}{3}$, koristimo

$$e^{4iz} = e^{4i(z-\frac{\pi}{3}) + \frac{4\pi}{3}i} = e^{4i(z-\frac{\pi}{3})} e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

odnosno

$$e^{2iz} = e^{2i(z-\frac{\pi}{3}) + \frac{2\pi}{3}i} = e^{2i(z-\frac{\pi}{3})} e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i} \left(e^{4i(z-\frac{\pi}{3})} e^{\frac{4\pi}{3}i} - e^{2i(z-\frac{\pi}{3})} e^{\frac{2\pi}{3}i} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(e^{\frac{4\pi}{3}i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4i)^n}{n!} (z - \tfrac{\pi}{3})^n - e^{\frac{2\pi}{3}i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i)^n}{n!} (z - \tfrac{\pi}{3})^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2i(n!)} \left(e^{\frac{4\pi}{3}i} (4i)^n - e^{\frac{2\pi}{3}i} (2i)^n \right) \left(z - \frac{\pi}{3} \right)^n . \end{aligned}$$

Područje konvergencije je $\mathbb{C}$.