LA1 2021./2022. Četvrta domaća zadaća

1. Neka je $A \in M_n$, $n \geq 3$, matrica sa svojstvom $\mathrm{r}(A) \leq n-2$. Pokažite da je tada $\tilde{A} = 0$.

2. Neka je $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Odredite matricu $A \in M_3$ takvu da je $\tilde{A} = B$. Postoji li takva matrica $A \in M_n$ za bilo koju zadanu regularnu matricu $B \in M_n$? Je li jedinstvena?

3. Pokažite da je inverz svake simetrične matrice također simetrična matrica.

4. Neka je x proizvoljan realan broj. Odredite rang matrice
$$A = \begin{pmatrix} x+1 & 0 & 0 & 0 \\ x+2 & x+2 & 0 & 0 \\ x+3 & x+3 & x+3 & 0 \\ x+4 & x+4 & x+4 & x+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Neka je $A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ pri čemu je navedena ekvivalencija realizirana isključivo elementarnim transformacijama redaka. Riješite sustav linearnih jednadžbi $AX = B$ ako je B zbroj prvog i posljednjeg stupca matrice A.