

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi ispitni rok – 26. siječnja 2026.

Zadatak 1. (22 boda)

- (a) (12 bodova) Provjerite je li preslikavanje definirano s

$$s((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x^T A y, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

skalarni produkt na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$.

- (b) (6 bodova) Odredite maksimum funkcije $f(\theta) = a \sin \theta + b \cos \theta$ uz uvjet $a \neq 0$ i $b \neq 0$.
Odredite θ za koji se taj maksimum postiže.
- (c) (4 boda) Koristeći Gramovu determinantu odredite je li skup $\{(1, i, 0), (0, 1, i), (i, 0, 1)\}$ linearno nezavisan skup u $\mathbb{C}^3$ sa standardnim skalarnim produktom.

Rješenje.

- (a) Preslikavanje je dano s

$$\begin{aligned} s((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) &= x^T A y = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ &= x_1(2y_1 + y_2 + y_3) + x_2(y_1 + 3y_2 + y_3) + x_3(y_1 + y_2 + 2y_3) \end{aligned}$$

Pozitivna definitnost

$$\begin{aligned} s((x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)) &= x_1(2x_1 + x_2 + x_3) + x_2(x_1 + 3x_2 + x_3) + x_3(x_1 + x_2 + 2x_3) \\ &= 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2) \\ &\quad + (x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2) + x_2^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

Kako je svaki pribrojnik nenegativan tada je i cijeli izraz nenegativan, tj. $s(x, x) \geq 0$.

Ako je $s(x, x) = 0$, tada je $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + x_3 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$ i $x_2 = 0$ iz čega slijedi da je $x = (0, 0, 0)$. Ako je $x = (0, 0, 0)$, tada je očito $s(x, x) = 0$. Preslikavanje zadovoljava pozitivnu definitnost.

Simetričnost

$$\begin{aligned} s((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) &= x_1(2y_1 + y_2 + y_3) + x_2(y_1 + 3y_2 + y_3) + x_3(y_1 + y_2 + 2y_3) \\ &= y_1(2x_1 + x_2 + x_3) + y_2(x_1 + 3x_2 + x_3) + y_3(x_1 + x_2 + 2x_3) \\ &= s((y_1, y_2, y_3), (x_1, x_2, x_3)) \end{aligned}$$

Preslikavanje zadovoljava (hermitsku) simetričnost.

Homogenost

$$\begin{aligned} s((\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3), (y_1, y_2, y_3)) &= \lambda x_1(2y_1 + y_2 + y_3) + \lambda x_2(y_1 + 3y_2 + y_3) \\ &\quad + \lambda x_3(y_1 + y_2 + 2y_3) \\ &= \lambda(x_1(2y_1 + y_2 + y_3) + x_2(y_1 + 3y_2 + y_3) \\ &\quad + x_3(y_1 + y_2 + 2y_3)) \\ &= \lambda s((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \end{aligned}$$

Preslikavanje zadovoljava homogenost.

Aditivnost

$$\begin{aligned} s(x + y, z) &= (x_1 + y_1)(2z_1 + z_2 + z_3) + (x_2 + y_2)(z_1 + 3z_2 + z_3) + (x_3 + y_3)(z_1 + z_2 + 2z_3) \\ &= (x_1(2z_1 + z_2 + z_3) + x_2(z_1 + 3z_2 + z_3) + x_3(z_1 + z_2 + 2z_3)) \\ &\quad + (y_1(2z_1 + z_2 + z_3) + y_2(z_1 + 3z_2 + z_3) + y_3(z_1 + z_2 + 2z_3)) \\ &= s(x, z) + s(y, z) \end{aligned}$$

Preslikavanje zadovoljava aditivnost.

Zaključak: Preslikavanje s je skalarni produkt.

- (b) Zadanu funkciju možemo zapisati kao skalarni produkt dva vektora x i y

$$f(\theta) = a \sin \theta + b \cos \theta = \langle (a, b) | (\sin \theta, \cos \theta) \rangle = \langle x | y \rangle.$$

Po CSB nejednakosti slijedi

$$\begin{aligned} |\langle x | y \rangle|^2 &\leq \langle x | x \rangle \langle y | y \rangle \\ |\langle (a, b) | (\sin \theta, \cos \theta) \rangle|^2 &\leq \langle (a, b) | (a, b) \rangle \langle (\sin \theta, \cos \theta) | (\sin \theta, \cos \theta) \rangle \\ |a \sin \theta + b \cos \theta|^2 &\leq (a^2 + b^2)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ |f(\theta)|^2 &\leq a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Zaključujemo da je $f(\theta) \leq |f(\theta)| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$. Jednakost u Cauchy–Schwarzovoj nejednakosti postiže se ako i samo ako su vektori x i y linearno zavisni, tj.

$$y = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

To znači

$$(\sin \theta, \cos \theta) = \lambda(a, b).$$

Iz uvjeta

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

slijedi

$$\lambda^2(a^2 + b^2) = 1,$$

pa je

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Za postizanje maksimalne vrijednosti funkcije f mora vrijediti $\lambda > 0$, pa dobivamo

$$\sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Kako je $b \neq 0$, iz toga slijedi

$$\tan \theta = \frac{a}{b}.$$

Dakle, maksimalna vrijednost funkcije

$$f(\theta) = a \sin \theta + b \cos \theta$$

iznosi

$$\max f(\theta) = \sqrt{a^2 + b^2},$$

a postiže se za kut θ koji zadovoljava

$$\sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

(c) Neka je $a = (1, i, 0)$, $b = (0, 1, i)$ i $c = (i, 0, 1)$. Imamo

$$\Gamma(a, b, c) = \begin{vmatrix} \langle a|a \rangle & \langle a|b \rangle & \langle a|c \rangle \\ \langle b|a \rangle & \langle b|b \rangle & \langle b|c \rangle \\ \langle c|a \rangle & \langle c|b \rangle & \langle c|c \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle a|a \rangle & \langle a|b \rangle & \langle a|c \rangle \\ \overline{\langle a|b \rangle} & \langle b|b \rangle & \langle b|c \rangle \\ \overline{\langle a|c \rangle} & \overline{\langle b|c \rangle} & \langle c|c \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & i & -i \\ -i & 2 & i \\ i & -i & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Skup $\{a, b, c\}$ je linearno nezavisan jer je Gramova determinanta različita od 0.

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi ispitni rok – 26. siječnja 2026.

Zadatak 2. (16 bodova) U unitarnom prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sa standardnim skalarnim produktom dan je skup $M = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : x - z + 2w = 0, -x + y + 3z = 0 \right\}$.

- (a) (4 boda) Dokažite da je M potprostor od $M_2(\mathbb{R})$ i odredite mu jednu bazu.
- (b) (6 bodova) Odredite ortogonalni komplement potprostora M (odredite mu jednu bazu).
- (c) (6 bodova) Odredite udaljenost vektora

$$\begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

od vektorskog prostora $M^\perp$.

Rješenje.

- (a) Neka je $A \in M$, $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$. Iz definicije skupa M slijedi da je

$$A = z \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pa iz toga dobivamo da M vektorski prostor s bazom $\{A_1, A_2\}$, gdje je

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (b) Neka je $B \in M^\perp$, $B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$. Iz toga slijedi da je

$$\begin{cases} 0 = \langle B | A_1 \rangle = x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = \langle B | A_2 \rangle = -2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Prostor rješenja ovog sustava dan je kao linearna ljuska skupa

$$\{(1, 0, -1, 2), (0, 1, 2, 2)\},$$

pa je $\{A_3, A_4\}$ baza $M^\perp$, gdje je

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (c) Zadatak se najbrže rješava ukoliko uočimo da je $A \in M$ pa je tražena udaljenost jednaka $\|A\| = \sqrt{114}$.

Zadatak se može riješiti i na sljedeći način.

Vektor $A = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ trebamo prikazati kao $A_M + A_{M^\perp}$, gdje je $A \in M$ i $A^\perp \in M^\perp$.

Iz toga dobivamo da je tražena udaljenost jednaka $\|A - A_{M^\perp}\|$. Gram-Schmidtovim postupkom dobivamo da je $\{E_3, E_4\}$ ortonormirana baza prostora $M^\perp$, gdje je

$$E_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, E_4 = \frac{1}{\sqrt{75}} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

S vježbi znamo da je

$$A_{M^\perp} = \langle A|E_3 \rangle E_3 + \langle A|E_4 \rangle E_4.$$

Iz toga dobivamo da je $A_{M^\perp} = 0$, iz čega slijedi da je $A \in M$ pa je tražena udaljenost jednaka $\|A\| = \sqrt{114}$.

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi ispitni rok – 26. siječnja 2026.

Zadatak 3. (24 boda) Neka je $A : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ preslikavanje dano formulom

$$A(a + bt + ct^2) = (-5a - 3b, -3b + c(2\lambda - 4), -a - 2b + c(\lambda - 2)),$$

gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (a) (6 bodova) Dokažite da je A linearan operator za sve $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (b) (10 bodova) U ovisnosti o parametru λ odredite rang i defekt operatora A te po jednu bazu za jezgru i sliku.
- (c) (8 bodova) Odredite matricni prikaz operatora A u paru baza $(e') = \{1, t - 3, 1 + t^2\}$ i $(f') = \{(1, 1, 0), (2, 3, 1), (0, 0, 1)\}$ za $\lambda = 2$.

Rješenje.

- (a) Trebamo pokazati $(A(\alpha p + \beta q))(t) = \alpha(A(p))(t) + \beta(A(q))(t)$, gdje su $p(t) = a + bt + ct^2$ i $q(t) = d + et + ft^2$.

$$\begin{aligned} (A(\alpha p + \beta q))(t) &= A((\alpha a + \beta d) + (\alpha b + \beta e)t + (\alpha c + \beta f)t^2) \\ &= (-5(\alpha a + \beta d) - 3(\alpha b + \beta e), -3(\alpha b + \beta e) + (\alpha c + \beta f)(2\lambda - 4), \\ &\quad -(\alpha a + \beta d) - 2(\alpha b + \beta e) + (\alpha c + \beta f)(\lambda - 2)) \\ &= ((-5\alpha a - 3\alpha b) + (-5\beta d - 3\beta e), \\ &\quad (-3\alpha b + \alpha c(2\lambda - 4)) + (-3\beta e + \beta f(2\lambda - 4)), \\ &\quad (-\alpha a - 2\alpha b + \alpha c(\lambda - 2)) + (-\beta d - 2\beta e + \beta f(\lambda - 2))) \\ &= \alpha(-5a - 3b, -3b + c(2\lambda - 4), -a - 2b + c(\lambda - 2)) + \\ &\quad \beta(-5d - 3e, -3e + f(2\lambda - 4), -d - 2e + f(\lambda - 2)) \\ &= \alpha A(a + bt + ct^2) + \beta A(d + et + ft^2) \\ &= \alpha(A(p))(t) + \beta(A(q))(t) \end{aligned}$$

- (b) Neka su $(e) = \{1, t, t^2\}$ i $(f) = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ kanonske baze redom vektorskih prostora $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ i $\mathbb{R}^3$. Trebamo odrediti rang operatora A u ovisnosti o parametru λ . Znamo da je $r(A) = r([A]_{(f,e)})$ pa se određivanje ranga operatora A svodi na određivanje ranga matrice $[A]_{(f,e)}$. Prvo odredimo kako operator A djeluje na bazi (e) .

$$A(1) = (-5, 0, -1), \quad A(t) = (-3, -3, -2), \quad A(t^2) = (0, 2\lambda - 4, \lambda - 2) \quad (1)$$

Matrični prikaz operatora A u paru baza (e) i (f) dan je s

$$[A]_{(f,e)} = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 2\lambda - 4 \\ -1 & -2 & \lambda - 2 \end{bmatrix}.$$

Rang te matrice određujemo standardnim postupkom.

$$\begin{bmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 2\lambda - 4 \\ -1 & -2 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 2 & \textcircled{1} & 0 \\ -1 & -2 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

Promatramo dva slučaja.

1. *slučaj* Ako je $\lambda = 2$, tada je $r(A) = 2$. Kako je $\dim \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = 3$, tada po teoremu o rangu i defektu zaključujemo da je defekt jednak $d(A) = \dim \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) - r(A) = 1$. U ovom slučaju operator A ima sljedeći oblik

$$A(a + bt + ct^2) = (-5a - 3b, -3b, -a - 2b)$$

pa slijedi

$$\begin{aligned} \text{Im} A &= \{(-5a - 3b, -3b, -a - 2b) : a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(-5, 0, -1) + b(-3, -3, -2) : a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= [\{(-5, 0, -1), (-3, -3, -2)\}]. \end{aligned}$$

Jezgru možemo odrediti rješavanjem $(-5a - 3b, -3b, -a - 2b) = (0, 0, 0)$ iz čega slijedi $a = b = 0$ i $c \in \mathbb{R}$. Tada je $\text{Ker} A = [\{t^2\}]$. To smo mogli zaključiti i iz (1) jer je u ovom slučaju $A(t^2) = (0, 0, 0)$.

2. *slučaj* Ako je $\lambda \neq 2$, tada je $r(A) = 3$. Po teoremu o rangu i defektu zaključujemo da je defekt jednak $d(A) = \dim \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) - r(A) = 0$ pa je jezgra trivijalna, tj. $\text{Ker} A = [\{0_v\}]$. Slika je razapeta vektorima

$$\begin{aligned} \text{Im} A &= \{(-5a - 3b, -3b + c(2\lambda - 4), -a - 2b + c(\lambda - 2)) : a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(-5, 0, -1) + b(-3, -3, -2) + c(0, 2\lambda - 4, \lambda - 2) : a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= [\{(-5, 0, -1), (-3, -3, -2), (0, 2\lambda - 4, \lambda - 2)\}]. \end{aligned}$$

- (c) Trebamo odrediti matrični zapis operatora A u paru baza (e') i (f') , tj. $[A]_{(f',e')}$. Iz (b) dijela imamo matrični zapis operatora A u paru baza (e) i (f) pa nam preostaje odrediti odgovarajuće matrice prijelaza.

$$[I]_{(e,e')} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [I]_{(f',f)} = [I]_{(f,f')}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Slijedi

$$\begin{aligned} [A]_{(f',e')} &= [I]_{(f',f)}[A]_{(f,e)}[I]_{(e,e')} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 12 & -5 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -15 & 42 & -15 \\ 5 & -15 & 5 \\ -6 & 16 & -6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi ispitni rok – 26. siječnja 2026.

Zadatak 4. (18 bodova) Linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadan je u bazi

$$(e) = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, -1, -1)\}$$

matricom

$$[A]_{(e)} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \\ 12 & -12 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nadite bazu prostora $\mathbb{R}^3$ u kojoj je matrica operatora A dijagonalizabilna (ako takva baza postoji).

Rješenje. Direktnim računom dobije se da je

$$k_A(\lambda) = \det([A]_{(e)} - \lambda I) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2),$$

pa je $\sigma(A) = \{-2, 1\}$. Preostaje odrediti svojstvene potprostore. Rješavanjem sustava $([A]_{(e)} - I)x = 0$ dobivamo da je $x_1 = x_2$, pa je $\text{Ker}([A]_{(e)} - I)$ linearna ljuska skupa $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, pri čemu su dani vektori zapisani u bazi (e) , a ne u kanonskoj bazi.

Rješavanjem sustava $([A]_{(e)} + 2I)x = 0$ dobivamo da je $x_2 = 2x_1$ i $x_3 = 4x_1$, pa je $\text{Ker}([A]_{(e)} + 2I)$ linearna ljuska skupa $\{(1, 2, 4)\}$, pri čemu je taj vektor zapisan u bazi (e) . Iz toga slijedi da bazu $(e') = (e_1 + e_2, e_3, e_1 + 2e_2 + 4e_4) = ((2, 1, 1), (1, -1, -1), (7, -3, -2))$ čine svojstveni vektori, a onda je to baza u kojoj se operator dijagonalizira.

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi ispitni rok – 26. siječnja 2026.

Zadatak 5. (20 bodova)

- a) (12 bodova) Neka je $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ konačnodimenzionalan unitarni prostor i L potprostor od V . Dokažite da je $L \dot{+} L^\perp = V$.
- b) (8 bodova) Može li linearni operator $B : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2$ biti epimorfizam? Može li biti monomorfizam? Ako može, nađite primjer takvog operatora. Obrazložite odgovore.

Rješenje.

- a) Vidjeti predavanja.
- b) Pretpostavimo da je B monomorfizam. Tada vrijedi $d(B) = 0$. Prema teoremu o rangui defektu imamo

$$\dim M_2(\mathbb{R}) = r(B) + d(B),$$

odnosno

$$4 = r(B) + 0,$$

odakle slijedi $r(B) = 4$.

Međutim, slika operatora B je potprostor kodomene $\mathcal{P}_2$, čija je dimenzija jednaka

$$\dim \mathcal{P}_2 = 3.$$

Stoga rang operatora B ne može biti veći od 3, što je u kontradikciji s $r(B) = 4$. Iz toga slijedi da linearni operator B ne može biti monomorfizam.

S druge strane, B može biti epimorfizam. Na primjer, definirajmo funkciju

$$B\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + b) + ct + dt^2.$$

Tada je B linearan operator. Nadalje, za svaki polinom

$$p(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 \in \mathcal{P}_2$$

postoji matrica

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

takva da vrijedi $B\left(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}\right) = p(t)$. Prema tome, $\text{Im } B = \mathcal{P}_2$ pa je B epimorfizam.