

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi kolokvij – 26. siječnja 2026.

Zadatak 1. (11 bodova) Neka je $(e) = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormirana baza prostora $V^3(O)$ i neka je $S : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$ linearni operator koji vektor prvo rotira za kut od 90° oko y -osi, a potom ga projicira na ravninu s jednadžbom $2x + y + z = 0$.

(a) (7 bodova) Odredite djelovanje operatora S na proizvoljni vektor iz $V^3(O)$.

(b) (4 boda) Postoji li baza (b) prostora $V^3(O)$ čiji je matrični prikaz operatora S u toj bazi

$$[S]_{(b)} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

(a) Neka je $R_\alpha : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$ linearan operator rotacije za kut α oko y -osi i neka je $P : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$ linearan operator projekcije na ravninu $2x + y + z = 0$. Matrični prikaz operatora R_{90° u bazi (e) dan je s

$$[R_{90^\circ}]_{(e)} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & 0 & \sin 90^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 90^\circ & 0 & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tu matricu možemo dobiti i bez poznavanja općenite matrice rotacije za neki kut α oko y -osi. Ako rotiramo vektor $\vec{i}$ za 90° u pozitivnom smjeru oko y -osi dobit ćemo vektor $-\vec{k}$, tj. $R_{90^\circ}(\vec{i}) = -\vec{k}$. Rotacijom vektora $\vec{j}$ za 90° u pozitivnom smjeru oko y -osi dobivamo isti taj vektor, $R_{90^\circ}(\vec{j}) = \vec{j}$, a rotacijom vektora $\vec{k}$ dobivamo vektor $\vec{i}$, $R_{90^\circ}(\vec{k}) = \vec{i}$.

Imamo zadanu ravninu $2x + y + z = 0$ čiji je jedinični vektor normale $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$. S vježbi je poznato da linearan operator P djeluje na proizvoljan vektor $\vec{v}$ na sljedeći način

$$P(\vec{v}) = \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{n}.$$

Djelovanjem operatora P na elemente baze (e) dobivamo

$$P(\vec{i}) = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}, \quad P(\vec{j}) = -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{5}{6}\vec{j} - \frac{1}{6}\vec{k}, \quad P(\vec{k}) = -\frac{1}{3}\vec{i} - \frac{1}{6}\vec{j} + \frac{5}{6}\vec{k}$$

iz čega slijedi

$$[P]_{(e)} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Operator S je kompozicija operatora P i R_{90° pa slijedi

$$\begin{aligned} [S]_{(e)} &= [P \circ R_{90^\circ}]_{(e)} = [P]_{(e)} \cdot [R_{90^\circ}]_{(e)} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ -5 & -1 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sada možemo odrediti djelovanje operatora S na proizvoljnom vektoru $\vec{v}$

$$[S(\vec{v})]_{(e)} = [S]_{(e)} \cdot [\vec{v}]_{(e)} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ -5 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2x - 2y + 2z \\ x + 5y - 2z \\ -5x - y - 2z \end{bmatrix},$$

odnosno

$$S(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{1}{6}((2x - 2y + 2z)\vec{i} + (x + 5y - 2z)\vec{j} + (-5x - y - 2z)\vec{k}).$$

- (b) Pretpostavimo da postoji baza (b) čiji je matrični prikaz operatora S zadan s $[S]_{(b)}$. Tada su matrice $[S]_{(e)}$ i $[S]_{(b)}$ slične pa imaju istu determinantu, rang i trag. Računanjem determinanti dobivamo

$$\det[S]_{(e)} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ -5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \det[S]_{(b)} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{27}$$

iz čega vidimo da je početna pretpostavka bila kriva. Do istog zaključka mogli smo doći određivanjem ranga. Rang matrice $[S]_{(e)}$ jednak je 2 zbog konstrukcije operatora S , a iz matrice $[S]_{(b)}$ lagano vidimo da je njen rang jednak 3. Zaključujemo da ne postoji baza (b) čiji je matrični prikaz operatora S zadan s $[S]_{(b)}$.

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi kolokvij – 26. siječnja 2026.

Zadatak 2. (13 bodova) Neka je $A : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ preslikavanje dano formulom

$$A(a + bt + ct^2) = (-5a - 3b, -3b + c(2\lambda - 4), -a - 2b + c(\lambda - 2)),$$

gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (a) (3 boda) Dokažite da je A linearan operator za sve $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (b) (6 bodova) U ovisnosti o parametru λ odredite rang i defekt operatora A te po jednu bazu za jezgru i sliku.
- (c) (4 boda) Odredite matrični prikaz operatora A u paru baza $(e') = \{1, t - 3, 1 + t^2\}$ i $(f') = \{(1, 1, 0), (2, 3, 1), (0, 0, 1)\}$ za $\lambda = 2$.

Rješenje.

- (a) Trebamo pokazati $(A(\alpha p + \beta q))(t) = \alpha(A(p))(t) + \beta(A(q))(t)$, gdje su $p(t) = a + bt + ct^2$ i $q(t) = d + et + ft^2$.

$$\begin{aligned} (A(\alpha p + \beta q))(t) &= A((\alpha a + \beta d) + (\alpha b + \beta e)t + (\alpha c + \beta f)t^2) \\ &= (-5(\alpha a + \beta d) - 3(\alpha b + \beta e), -3(\alpha b + \beta e) + (\alpha c + \beta f)(2\lambda - 4), \\ &\quad -(\alpha a + \beta d) - 2(\alpha b + \beta e) + (\alpha c + \beta f)(\lambda - 2)) \\ &= ((-5\alpha a - 3\alpha b) + (-5\beta d - 3\beta e), \\ &\quad (-3\alpha b + \alpha c(2\lambda - 4)) + (-3\beta e + \beta f(2\lambda - 4)), \\ &\quad (-\alpha a - 2\alpha b + \alpha c(\lambda - 2)) + (-\beta d - 2\beta e + \beta f(\lambda - 2))) \\ &= \alpha(-5a - 3b, -3b + c(2\lambda - 4), -a - 2b + c(\lambda - 2)) + \\ &\quad \beta(-5d - 3e, -3e + f(2\lambda - 4), -d - 2e + f(\lambda - 2)) \\ &= \alpha A(a + bt + ct^2) + \beta A(d + et + ft^2) \\ &= \alpha(A(p))(t) + \beta(A(q))(t) \end{aligned}$$

- (b) Neka su $(e) = \{1, t, t^2\}$ i $(f) = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ kanonske baze redom vektorskih prostora $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ i $\mathbb{R}^3$. Trebamo odrediti rang operatora A u ovisnosti o parametru λ . Znamo da je $r(A) = r([A]_{(f,e)})$ pa se određivanje ranga operatora A svodi na određivanje ranga matrice $[A]_{(f,e)}$. Prvo odredimo kako operator A djeluje na bazi (e) .

$$A(1) = (-5, 0, -1), \quad A(t) = (-3, -3, -2), \quad A(t^2) = (0, 2\lambda - 4, \lambda - 2) \quad (1)$$

Matrični prikaz operatora A u paru baza (e) i (f) dan je s

$$[A]_{(f,e)} = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 2\lambda - 4 \\ -1 & -2 & \lambda - 2 \end{bmatrix}.$$

Rang te matrice određujemo standardnim postupkom.

$$\begin{bmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 2\lambda - 4 \\ -1 & -2 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 2 & \textcircled{1} & 0 \\ -1 & -2 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

Promatramo dva slučaja.

1. *slučaj* Ako je $\lambda = 2$, tada je $r(A) = 2$. Kako je $\dim \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = 3$, tada po teoremu o rang i defektu zaključujemo da je defekt jednak $d(A) = \dim \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) - r(A) = 1$. U ovom slučaju operator A ima sljedeći oblik

$$A(a + bt + ct^2) = (-5a - 3b, -3b, -a - 2b)$$

pa slijedi

$$\begin{aligned} \text{Im} A &= \{(-5a - 3b, -3b, -a - 2b) : a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(-5, 0, -1) + b(-3, -3, -2) : a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= [\{(-5, 0, -1), (-3, -3, -2)\}]. \end{aligned}$$

Jezgru možemo odrediti rješavanjem $(-5a - 3b, -3b, -a - 2b) = (0, 0, 0)$ iz čega slijedi $a = b = 0$ i $c \in \mathbb{R}$. Tada je $\text{Ker} A = [\{t^2\}]$. To smo mogli zaključiti i iz (1) jer je u ovom slučaju $A(t^2) = (0, 0, 0)$.

2. *slučaj* Ako je $\lambda \neq 2$, tada je $r(A) = 3$. Po teoremu o rang i defektu zaključujemo da je defekt jednak $d(A) = \dim \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) - r(A) = 0$ pa je jezgra trivijalna, tj. $\text{Ker} A = [\{0_v\}]$. Slika je razapeta vektorima

$$\begin{aligned} \text{Im} A &= \{(-5a - 3b, -3b + c(2\lambda - 4), -a - 2b + c(\lambda - 2)) : a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(-5, 0, -1) + b(-3, -3, -2) + c(0, 2\lambda - 4, \lambda - 2) : a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= [\{(-5, 0, -1), (-3, -3, -2), (0, 2\lambda - 4, \lambda - 2)\}]. \end{aligned}$$

- (c) Trebamo odrediti matrični zapis operatora A u paru baza (e') i (f') , tj. $[A]_{(f',e')}$. Iz (b) dijela imamo matrični zapis operatora A u paru baza (e) i (f) pa nam preostaje odrediti odgovarajuće matrice prijelaza.

$$[I]_{(e,e')} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [I]_{(f',f)} = [I]_{(f,f')}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Slijedi

$$\begin{aligned} [A]_{(f',e')} &= [I]_{(f',f)}[A]_{(f,e)}[I]_{(e,e')} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 12 & -5 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -15 & 42 & -15 \\ 5 & -15 & 5 \\ -6 & 16 & -6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi kolokvij – 26. siječnja 2026.

Zadatak 3. (10 bodova) U unitarnom prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sa standardnim skalarnim produktom zadana je baza

$$(e) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Neka je $f^* : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ linearan funkcional dan formulom $f^*(A) = \text{tr}(AB)$, gdje je

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) (4 boda) Odredite dualnu bazu (e^*) baze (e) , tj. odredite djelovanje funkcionala iz dualne baze na proizvoljnu matricu $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.
- (b) (4 boda) Prikažite f^* u bazi (e^*) .
- (c) (2 boda) Odredite $C \in M_2(\mathbb{R})$ takav da je $f^*(A) = \langle A | C \rangle$ za svaki $A \in M_2(\mathbb{R})$.

Rješenje.

- (a) Prikažimo proizvoljni element $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ prostora $M_2(\mathbb{R})$ kao linearnu kombinaciju vektora baze (e) tj.

$$A = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4. \tag{2}$$

Izjednačavanjem dobivamo sustav

$$\begin{cases} \alpha + \gamma + \delta = x \\ \gamma + \delta = y \\ \beta + \delta = z \\ \alpha + \delta = w. \end{cases}$$

Rješavanjem sustava dobije se da je $\alpha = x - y$, $\beta = x - y + z - w$, $\gamma = x - w$, $\delta = -x + y + w$. Djelovanjem vektora dualne baze na (2) dobivamo da je

$$\begin{aligned} e_1^*(A) &= x - y, \\ e_2^*(A) &= x - y + z - w, \\ e_3^*(A) &= x - w, \\ e_4^*(A) &= -x + y + w. \end{aligned}$$

(b) Kako je

$$f^* = f^*(e_1)e_1^* + f^*(e_2)e_2^* + f^*(e_3)e_3^* + f^*(e_4)e_4^*$$

dobivamo da je

$$f^* = 3e_1^* - e_2^* + e_3^* + 2e_4^*.$$

(c) Kako je standardni skalarni produkt dan formulom $\langle A | B \rangle = \text{tr}(AB^t)$ gdje su $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ proizvoljni, iz toga slijedi da je $C = B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi kolokvij – 26. siječnja 2026.

Zadatak 4. (9 bodova) Linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadan je u bazi

$$(e) = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, -1, -1)\}$$

matricom

$$[A]_{(e)} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \\ 12 & -12 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nadite bazu prostora $\mathbb{R}^3$ u kojoj je matrica operatora A dijagonalizabilna (ako takva baza postoji).

Rješenje. Direktnim računom dobije se da je

$$k_A(\lambda) = \det([A]_{(e)} - \lambda I) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2),$$

pa je $\sigma(A) = \{-2, 1\}$. Preostaje odrediti svojstvene potprostore. Rješavanjem sustava $([A]_{(e)} - I)x = 0$ dobivamo da je $x_1 = x_2$, pa je $\text{Ker}([A]_{(e)} - I)$ linearna ljuska skupa $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, pri čemu su dani vektori zapisani u bazi (e) , a ne u kanonskoj bazi.

Rješavanjem sustava $([A]_{(e)} + 2I)x = 0$ dobivamo da je $x_2 = 2x_1$ i $x_3 = 4x_1$, pa je $\text{Ker}([A]_{(e)} + 2I)$ linearna ljuska skupa $\{(1, 2, 4)\}$, pri čemu je taj vektor zapisan u bazi (e) . Iz toga slijedi da bazu $(e') = (e_1 + e_2, e_3, e_1 + 2e_2 + 4e_4) = ((2, 1, 1), (1, -1, -1), (7, -3, -2))$ čine svojstveni vektori, a onda je to baza u kojoj se operator dijagonalizira.

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi kolokvij – 26. siječnja 2026.

Zadatak 5. (7 bodova)

- a) (3 boda) Neka su V i W netrivialni konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem, $A : V \rightarrow W$ linearni operator, $(e) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ baza za V , $(f) = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ baza za W . Definirajte matrični zapis linearnog operatora A u paru baza (e) i (f) .
- b) (4 boda) Može li linearni operator $B : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2$ biti epimorfizam? Može li biti monomorfizam? Ako može, nađite primjer takvog operatora. Obrazložite odgovore.

Rješenje.

- a) Vidjeti predavanja.
- b) Pretpostavimo da je B monomorfizam. Tada vrijedi $d(B) = 0$. Prema teoremu o rangui defektu imamo

$$\dim M_2(\mathbb{R}) = r(B) + d(B),$$

odnosno

$$4 = r(B) + 0,$$

odakle slijedi $r(B) = 4$.

Međutim, slika operatora B je potprostor kodomene $\mathcal{P}_2$, čija je dimenzija jednaka

$$\dim \mathcal{P}_2 = 3.$$

Stoga rang operatora B ne može biti veći od 3, što je u kontradikciji s $r(B) = 4$. Iz toga slijedi da linearni operator B ne može biti monomorfizam.

S druge strane, B može biti epimorfizam. Na primjer, definirajmo funkciju

$$B\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + b) + ct + dt^2.$$

Tada je B linearan operator. Nadalje, za svaki polinom

$$p(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 \in \mathcal{P}_2$$

postoji matrica

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

takva da vrijedi $B\left(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}\right) = p(t)$. Prema tome, $\text{Im } B = \mathcal{P}_2$ pa je B epimorfizam.