# LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – 23. studenog 2023.

**Zadatak 1.** (12 bodova) Odredite sve parametre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ za koje je preslikavanje $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zadano s

$$s(x, y) = x_1y_1 + (2 - \alpha^2)x_1y_2 + (4 - 3\alpha^2)x_2y_1 + 2\alpha x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + \beta x_3y_3$$

skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$.

*Rješenje.* Jedno od svojstava koje preslikavanje $s$ mora zadovoljavati da bi bilo skalarni produkt je $s(y, x) = \overline{s(x, y)}$ za sve $x, y \in \mathbb{R}^3$. Uočimo da je $s(y, x) = \overline{s(x, y)}$ ako i samo ako vrijedi

$$\begin{aligned} &x_1y_1 + (2 - \alpha^2)x_1y_2 + (4 - 3\alpha^2)x_2y_1 + 2\alpha x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + \beta x_3y_3 \\ =&y_1x_1 + (2 - \alpha^2)y_1x_2 + (4 - 3\alpha^2)y_2x_1 + 2\alpha y_2x_2 - y_2x_3 - y_3x_2 + \beta y_3x_3, \end{aligned}$$

odnosno ako i samo ako je

$$(2 - \alpha^2)(x_1y_2 - y_1x_2) + (4 - 3\alpha^2)(x_2y_1 - y_2x_1) = 0,$$

tj. ako i samo ako je

$$(x_1y_2 - y_1x_2)(2\alpha^2 - 2) = 0.$$

Da bi posljednja jednakost vrijedila za sve $x, y \in \mathbb{R}^3$, nužno je $2\alpha^2 - 2 = 0$. Ukoliko bi vrijedilo $2\alpha^2 - 2 \neq 0$, onda, da bi vrijedilo $s(y, x) = \overline{s(x, y)}$ za sve $x, y \in \mathbb{R}^3$, mora biti $x_1y_2 - y_1x_2 = 0$ za sve $x, y \in \mathbb{R}^3$, a to očito nije istina (uzmimo npr. $x = (1, 1, 0), y = (1, 0, 0)$). Dakle, da bi $s$ uopće imao šansu biti skalarni produkt, mora vrijediti $2\alpha^2 - 2 = 0$, odnosno $\alpha \in \{-1, 1\}$.

1. slučaj, $\alpha = -1$: Ukoliko je $\alpha = -1$, imamo

   $$s(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + \beta x_3y_3.$$

   Sada je

   $$s(x, x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_2x_3 + \beta x_3^2.$$

   Stavimo li npr. $x = (0, 1, 0)$, dobivamo

   $$s((0, 1, 0), (0, 1, 0)) = -2 < 0,$$

   pa zaključujemo da $s$ nije skalarni produkt za $\alpha = -1$.

2. slučaj, $\alpha = 1$: Ukoliko je $\alpha = 1$, imamo

   $$s(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + \beta x_3y_3.$$

   Sada je

   $$s(x, x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + \beta x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (\beta - 1)x_3^2.$$

   2.1 slučaj $\alpha = 1$, $\beta - 1 < 0$: Ako je $\beta - 1 < 0$, onda za $x = (1, -1, -1)$ dobijemo

   $$s((1, -1, -1), (1, -1, -1)) = \beta - 1 < 0$$

   pa $s$ nije skalarni produkt.

2.2 slučaj $\alpha = 1$, $\beta - 1 = 0$: Ako je $\beta - 1 = 0$, tj. $\beta = 1$, onda je

$$s(x, x) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \geq 0$$

Stavimo li $x = (1, -1, -1)$, dobivamo

$$s((1, -1, -1), (1, -1, -1)) = 0,$$

iako je $(1, -1, -1) \neq (0, 0, 0)$ pa ni u ovom slučaju $s$ nije skalarni produkt.

2.3 slučaj $\alpha = 1$, $\beta - 1 > 0$: Ako je $\beta - 1 > 0$, tj. $\beta > 1$, onda je

$$s(x, x) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (\beta - 1)x_3^2 \geq 0$$

i vrijedi $s(x, x) = 0$ ako i samo ako je

$$x_1 + x_2 = 0,\ x_2 - x_3 = 0,\ x_3 = 0,$$

tj. ako i samo ako je $x = (0, 0, 0)$. Dakle, za $\alpha = 1$, $\beta > 1$ preslikavanje $s$ zadovoljava i svojstvo pozitivne definitnosti i svojstvo hermitske simetričnosti. Lagano se provjeri da u tim slučajevima $s$ zadovoljava i svojstvo homogenosti i aditivnosti (taj dio prepuštamo čitatelju).

Dakle, $s$ je skalarni produkt ako i samo ako je $\alpha = 1$, $\beta > 1$.

# LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – 23. studenog 2023.

**Zadatak 2.** (12 bodova)

a) (5 bodova) Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ te $||\cdot||$ standardna norma na $\mathbb{R}^3$ (2-norma). Dokažite da je tada preslikavanje

$$s(x) = ||Ax||, \quad x = (x_1, x_2, x_3)$$

norma na $\mathbb{R}^3$.

b) (2 boda) Odredite $s(2, -1, -1)$, pri čemu je $s$ norma iz a) dijela zadatka.

c) (5 bodova) Koristeći ortogonalnu projekciju, odredite za koje $k, l \in \mathbb{R}$ će norma vektora $x = (1, k, l)$ biti minimalna, pri čemu promatramo normu $s$ iz a) dijela zadatka.

*Rješenje.*

a) Provjerimo svojstva norme

(1) $s(x) = \|Ax\| \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}^3$. Nadalje, $s(x) = 0$ ako i samo ako je $Ax = 0$. Uočimo da je $\det(A) = 6 \neq 0$ pa je $A$ regularna matrica, iz čega slijedi da homogeni sustav $Ax = 0$ ima jedinstveno, trivijalno rješenje. Dakle, $s(x) = 0$ ako i samo ako je $x = (0, 0, 0)$.

(2) $s(\lambda x) = \|A(\lambda x)\| = \|\lambda Ax\| = |\lambda|\|Ax\| = |\lambda|s(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}^3$ i za sve $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3) $s(x + y) = \|A(x + y)\| = \|Ax + Ay\| \leq \|Ax\| + \|Ay\| = s(x) + s(y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}^3$.

Dakle, $s$ je norma na $\mathbb{R}^3$.

b) Za $x \in \mathbb{R}^3$ je $Ax = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 3x_3 \\ 3x_2 + x_3 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$ pa je

$$s(x) = \|Ax\| = \|(x_1 - x_2 + 3x_3, 3x_2 + x_3, 2x_3\| = \sqrt{(x_1 - x_2 + 3x_3)^2 + (3x_2 + x_3)^2 + (2x_3)^2}.$$

Uvrstimo li $x = (2, -1, -1)$, dobivamo $s(2, -1, -1) = \sqrt{0^2 + 4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$.

c) Želimo minimizirati izraz

$$f(k, l) = \sqrt{(1 - k + 3l)^2 + (3k + l)^2 + (2l)^2}.$$

Uočimo da je $\min f(k, l) = \min d((1, 0, 0), (k - 3l, 3k + l, 2l) = d((1, 0, 0), M)$, gdje je

$$M = \{(k - 3l, 3k + l, 2l) : k, l \in \mathbb{R}\} = [\{(1, 3, 0), (-3, 1, 2)\}].$$

Uvedemo li oznaku $b = (1, 0, 0)$, dobivamo da je

$$d(b, M) = d(b, b_M),$$

pri čemu je $b_M$ ortogonalna projekcija vektora $b$ na $M$ i ona je dana formulom

$$b_M = \langle b \,|\, e_1 \rangle e_1 + \langle b \,|\, e_2 \rangle e_2,$$

gdje je $\{e_1, e_2\}$ ortonormirana baza za $M$. Primjenom GS-postupka na vektore $(1,3,0),(-3,1,2)$ dobivamo

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3,0), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}(-3,1,2)$$

pa je

$$b_M = \frac{1}{10}(1,3,0) - \frac{3}{14}(-3,1,2).$$

Dakle, minimum se postiže za $k = \frac{1}{10}$ i za $l = -\frac{3}{14}$.

# LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – 23. studenog 2023.

**Zadatak 3.** (8 bodova) Na prostoru $\mathcal{P}_2$ realnih polinoma stupnja manjeg ili jednakog 2, dan je skalarni produkt

$$\langle p \,|\, q \rangle = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + \frac{1}{4}p''(0)q''(0).$$

a) (3 boda) Odredite ortogonalni komplement potprostora $M = [\{1-t\}]$ s obzirom na taj skalarni produkt.

b) (5 bodova) Koristeći Gram-Schmidtov postupak ortonormirajte skup $\{2, 1+t+t^2\}$ s obzirom na zadani skalarni produkt i nadopunite ga do ortonormirane baze za $\mathcal{P}_2$.

*Rješenje.*

a) Uočimo da je za $p(t) = a_1t^2 + b_1t + c_1$, $q(t) = a_2t^2 + b_2t + c_2$

$$\langle p \,|\, q \rangle = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2.$$

Dakle, $M^\perp = \{at^2 + bt + c : -b + c = 0\} = [\{t^2, 1+t\}]$.

b) Primjenom Gram-Schmidtovog postupka dobivamo

$$\begin{aligned}
e_1(t) &= \frac{2}{||2||} = \frac{2}{\sqrt{\langle 2 \,|\, 2\rangle}} = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1 \\
b_2(t) &= 1 + t + t^2 - \langle 1 + t + t^2 \,|\, e_1 \rangle e_1(t) = 1 + t + t^2 - 1 = t + t^2 \\
e_2(t) &= \frac{b_2}{||b_2||} = \frac{t+t^2}{\sqrt{\langle b_2 \,|\, b_2\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t+t^2)
\end{aligned}$$

Skup $\left\{1, \frac{1}{\sqrt{2}}(t+t^2)\right\}$ nadopunimo do baze $\left\{1, \frac{1}{\sqrt{2}}(t+t^2), t^2\right\}$ i ortonormirajmo.

$$\begin{aligned}
b_3(t) &= t^2 - \langle t^2 \,|\, e_1 \rangle e_1(t) - \langle t^2 \,|\, e_2 \rangle e_2(t) \\
&= t^2 - \frac{1}{2}(t+t^2) = \frac{1}{2}(t^2 - t) \\
e_3 &= \frac{b_3}{||b_3||} = \frac{t^2 - t}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Dakle $\left\{1, \frac{1}{\sqrt{2}}(t+t^2), \frac{1}{\sqrt{2}}(-t+t^2)\right\}$ je otronormirana baza za $\mathcal{P}_2$.

# LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – 23. studenog 2023.

**Zadatak 4.** (10 bodova) Zadane su točke $T_1 = (2,-1)$, $T_2 = (-2,3)$, $T_3 = (1,1)$, $T_4 = (-1,-2)$, $T_5 = (0,2)$. Koristeći ortogonalnu projekciju, odredite pravac $y = kx + l$ koji najbolje aproksimira dane točke.

*Rješenje.* Želimo minimizirati izraz

$$f(k,l) = \sum_{i=1}^{5}(y_i-(kx_i+l))^2 = (-1-(2k+l))^2+(3-(-2k+l))^2+(1-(k+l))^2+(-2-(-k+l))^2+(2-l)^2.$$

Uočio da je $f(k,l) = d((-1,3,1,-2,2),(2k+l,-2k+l,k+l,-k+l,l))^2$. Stavimo li

$$M = \{(2k+l,-2k+l,k+l,-k+l,l) \,:\, k,l \in \mathbb{R}\} = \{k(2,-2,1,-1,0)+l(1,1,1,1,1) \,:\, k,l \in \mathbb{R}\},$$

vidimo da je $M = [\{(2,-2,1,-1,0),(1,1,1,1,1)\}]$ pa je $\min_{k,l\in\mathbb{R}} f(k,l) = d((-1,3,1,-2,2),M)^2$. Znamo da je $d((-1,3,1,-2,2),M) = d(b,b_M)$, gdje je $b = (-1,3,1,-2,2)$, a $b_M$ ortogonalna projekcija vektora $b$ na $M$. Stavimo

$$a_1 = (2,-2,1,-1,0),\ \ a_2 = (1,1,1,1,1).$$

Ortonormiranjem dobivamo vektore $e_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(2,-2,1,-1,0)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,1,1,1,1)$. Sada je

$$b_M = \langle b \,|\, e_1\rangle e_1 + \langle b \,|\, e_2\rangle e_2 = \frac{-5}{10}(2,-2,1,-1,0)+\frac{3}{5}(1,1,1,1,1) = -\frac{1}{2}(2,-2,1,-1,0)+\frac{3}{5}(1,1,1,1,1).$$

Taj minimum se dostiže za $k = -\frac{1}{2}$ i $l = \frac{3}{5}$, odnosno, pravac koji najbolje aproksimira točke $T_1 = (2,-1)$, $T_2 = (-2,3)$, $T_3 = (1,1)$, $T_4 = (-1,-2)$, $T_5 = (0,2)$ je pravac s jednadžbom $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}$.

# LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – 23. studenog 2023.

**Zadatak 5.** (8 bodova)

a) (4 boda) Neka je $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ unitarni prostor i $a, b, c \in V$ takvi da je $\Gamma(a, b, c) \neq 0$. Dokažite da je skup $\{a, b, c\}$ linearno nezavisan.

b) (4 boda) Neka je $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ konačnodimenzionalni unitarni prostor, $M$ potprostor od $V$ i $b \in V$. Definirajte udaljnost vektora $b$ od potprostora $M$, definirajte ortogonalnu projekciju vektora $b$ na potprostor $M$ i dokažite da je

$$d(b, M) = d(b, b_M)$$

gdje je $b_M$ ortogonalna projekcija vektora $b$ na potprostor $M$.

*Rješenje.* Rješenje se nalazi u udžbeniku https://web.math.pmf.unizg.hr/ fran/LA-udzbenik.pdf

Pogledajte Propoziciju 5. 1. 7. (s tim da je ovdje trebalo dokazati samo jedan smjer i tu u slučaju $n = 3$), propoziciju 5. 4. 7., definiciju neposredno prije te propozicije i definiciju ortogonalne projekcije vektora na potprostor na str. 151.