Linearna algebra 2
vježbe

uredili: Ljiljana Arambašić, Tomislav Berić, Ana Prlić

Sadržaj

Poglavlje 1

Linearni operatori, primjeri i osnovna svojstva

Definicija 1.1. Neka su V, W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $A : V \to W$ zovemo **linearni operator** ako vrijedi

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y), \quad \forall x, y \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{F}. \quad \text{(svojstvo linearnosti)}$$

Posebno, ako je kodomena preslikavanja A polje $\mathbb{F}$ ($W = \mathbb{F}$), linearni operator A zovemo **linearni funkcional**.
Svojstvu linearnosti ekvivalentno je

$$\begin{aligned} A(x+y) &= A(x) + A(y), \quad \forall x, y \in V \quad \text{(aditivnost)} \\ A(\alpha x) &= \alpha A(x), \quad \forall x \in V, \alpha \in \mathbb{F} \quad \text{(homogenost).} \end{aligned}$$

Zadatak 1.1. Provjerite jesu li sljedeća preslikavanja linearni operatori:

(a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 - x_2)$ (tipičan linearan operator s $\mathbb{R}^m$ u $\mathbb{R}^n$),

(b) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 - x_3, x_1 - 4x_2 + 2x_3, 3x_1 - x_2)$.

(c) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A(x, y) = |x|$,

(d) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A(x, y) = x \cdot y$,

(e) $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $A(z) = \overline{z}$,

(f) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x, y) = (x, y + 2)$.

(g) $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $f(p) = p(0)$,

(h) $g : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $g(p) = \int_0^1 p(t)\mathrm{d}t$,

(i) $k : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $k(p) = \int_0^1 p\left(t^2\right) \mathrm{d}t$.

Rješenje

(a) da (raspisati)

(b) da (raspisati)

(c) Tražimo protuprimjer:

$$1+1=|1|+|-1|=A(1,0)+A(-1,0)\neq A\left((1,0)+(-1,0)\right)=A(0,0)=|0|=0.$$

(d) Protuprimjer:

$$A(\alpha x,\alpha y)=\alpha x\cdot\alpha y=\alpha^2 xy\neq\alpha xy=\alpha A(x,y),$$

za $\alpha\neq 0,1$, $x,y\neq 0$.

(e) A je linearan operator na $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Ako su $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, onda je

$$A\left(\alpha z_1+\beta z_2\right)=\overline{\alpha z_1+\beta z_2}=\overline{\alpha z_1}+\overline{\beta z_2}=\alpha\overline{z_1}+\beta\overline{z_2}=\alpha A(z_1)+\beta A(z_2).$$

S druge strane, na $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ A nije linearan operator. Protuprimjer:

$$A(i\cdot i)=A(-1)=\overline{-1}=-1\neq iA(i)=i\cdot\overline{i}=i(-i)=-i^2=1.$$

(f) Primijetimo da A ne preslikava nul-vektor u nul-vektor, što je nužan uvjet za svaki linearan operator. Naime, $A(0,0)=(0,2)\neq(0,0)$.

(g) da (raspisati)

(h) da (raspisati)

(i) da (raspisati)

Zadatak 1.2. Provjerite jesu li sljedeća preslikavanja linearni operatori ($\mathcal{P}_k$ je prostor polinoma s realnim koeficijentima stupnja manjeg ili jednakog k, a $\mathcal{P}$ je prostor (svih) polinoma s realnim koeficijentima):

(a) $A:\mathcal{P}_k\to\mathcal{P}_k$, $(A(p))(t)=p(t+1)$, $t\in\mathbb{R}$,

(b) $B:\mathcal{P}_k\to\mathcal{P}_k$, $(B(p))(t)=p(t)+1$, $t\in\mathbb{R}$,

(c) $C:\mathcal{P}\to\mathcal{P}$, $(C(p))(t)=(p(t))^2$, $t\in\mathbb{R}$,

(d) $D:\mathcal{P}\to\mathcal{P}$, $(D(p))(t)=(p\circ p)(t)$, $t\in\mathbb{R}$.

Rješenje

(a) Trebamo provjeriti vrijedi li

$$A\left(\alpha p+\beta q\right)=\alpha A(p)+\beta A(q)$$

za sve $p,q\in\mathcal{P}_k$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Za proizvoljni $t\in\mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned}(A\left(\alpha p+\beta q\right))(t)&=\left(\alpha p+\beta q\right)(t+1)\\&=\alpha p(t+1)+\beta q(t+1)\\&=\alpha(A(p))(t)+\beta(A(q))(t)\\&=\left(\alpha A(p)+\beta A(q)\right)(t).\end{aligned}$$

pa je

$$A\left(\alpha p+\beta q\right)=\alpha A(p)+\beta A(q).$$

Dakle, A je linearan operator.

(b) Ako je $p \equiv 0$ nul–polinom, onda je $(B(p))(t) = 1$ pa B nije linearan operator jer ne preslikava nul-vektor u nul-vektor.

(c) Za $p(t) = 1,\ t \in \mathbb{R}$ i $\alpha = 2$, dobivamo $(C(2p))(t) = 2^2 = 4$, $2(C(p))(t) = 2$ za sve $t \in \mathbb{R}$ pa je $C(2p) \neq 2C(p)$, odnosno ne vrijedi homogenost pa C nije linearni operator. Lako se pokaže da ne vrijedi ni aditivnost (dokažite za zadaću), mada to nije potrebno provjeravati jer čim zaključimo da ne vrijedi homogenost, možemo zaključiti da funkcija nije linearni operator.

(d) Za $p(t) = t,\ t \in \mathbb{R}$ i $\alpha = 2$, dobivamo $(D(2p))(t) = (2p)(2t) = 2(2t) = 4t$, $2(D(p))(t) = 2t$ za sve $t \in \mathbb{R}$ pa je $D(2p) \neq 2D(p)$, odnosno ne vrijedi homogenost pa D nije linearni operator. Lako se pokaže da ne vrijedi ni aditivnost (dokažite za zadaću), mada to nije potrebno provjeravati jer čim zaključimo da ne vrijedi homogenost, možemo zaključiti da funkcija nije linearni operator. □

Zadatak 1.3. Neka je p pravac kroz ishodište čija je jednadžba $y = kx$. Odredite eksplicitne formule za sljedeća preslikavanja, te dokažite da su to linearni operatori:

(a) $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, pri čemu je $P(x, y)$ projekcija točke (x, y) na pravac p.

(b) $Z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, pri čemu su $Z(x, y)$ i (x, y) osno simetrične točke s obzirom na pravac p.

Ako je p pravac koji ne prolazi kroz ishodište, hoće li preslikavanja P i Z i tada biti linearni operatori?

Rješenje Nacrtati slike!

$$P(x, y) = \frac{1}{k^2 + 1}(x + ky, kx + k^2 y).$$

Kako je $P(x, y)$ polovište dužine s krajnjim točkama (x, y) i $Z(x, y)$, vrijedi

$$(x, y) + Z(x, y) = 2P(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Odavde slijedi

$$Z(x, y) = 2P(x, y) - (x, y) = ...$$

Za zadnje pitanje dovoljno je gledati gdje se preslikava $(0, 0)$. □

Zadatak 1.4. Neka je $R_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rotacija ravnine oko ishodišta za kut φ u pozitivnom smjeru (suprotnom kretanju kazaljke na satu). Odredite eksplicitnu formulu za R_φ i pokažite da je R_φ linearni operator.

Rješenje Slika! Račun!

$$R_\varphi(x, y) = (x \cos \varphi - y \sin \varphi, x \sin \varphi + y \cos \varphi).$$

Linearnost za zadaću. □

Napomena 1.2. U sva tri prethodna primjera treba naglasiti da umjesto $\mathbb{R}^2$ možemo gledati i $V^2(O)$, za neki od slučajeva napisati i oblik formule, na primjer

$$R_\varphi(x\vec{i} + y\vec{j}) = (x \cos \varphi - y \sin \varphi)\vec{i} + (x \sin \varphi + y \cos \varphi)\vec{j}.$$

Zadatak 1.5. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ i $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ preslikavanje dano s

$$f(X) = AX - XA.$$

Dokažite da je f linearni operator.

RJEŠENJE Vrijedi $f(\alpha X + \beta Y) = A(\alpha X + \beta Y) - (\alpha X + \beta Y)A = \alpha(AX - XA) + \beta(AY - YA) = \alpha f(X) + \beta f(Y)$. □

NAPOMENA 1.3. Uočite da u prethodnom zadatku uopće nije bitno koji su matrični elementi matrice A. Funkcija f gornjeg oblika je linearni operator za svaku matricu $A \in M_2(\mathbb{R})$.

ZADATAK 1.6. Neka je $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_{n1}(\mathbb{R})$ preslikavanje tako da je $T(X)$ zbroj stupaca matrice X. Dokažite da je T linearni operator.

RJEŠENJE Prvo odredimo eksplicitni oblik preslikavanja T. Ako je $A \in M_{n1}$ matrica čiji su svi elementi jedinice, tada je $T(X) = XA$ za svaki $X \in M_n$. Sada se lako provjeri linearnost od T.

ZADATAK 1.7. Neka je $\mathcal{P}_3 = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ polinom} \mid \operatorname{st} p \leq 3\}$ i $Q : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$, $Qp =$ polinom stupnja 2 čiji graf prolazi točkama $(-1, p(-1))$, $(0, p(0))$, $(1, p(1))$. Dokažite da je Q linearni operator.

RJEŠENJE Operator Q je tzv. *operator interpolacije* u čvorovima -1, 0, 1. Odredimo formulu za Q. Neka je $p \in \mathcal{P}_3$. Tada je $(Qp)(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Mora biti

$$\begin{aligned}
(Qp)(-1) &= a_0 - a_1 + a_2 = p(-1)\\
(Qp)(0) &= a_0 = p(0)\\
(Qp)(1) &= a_0 + a_1 + a_2 = p(1)
\end{aligned}$$

Slijedi da je $a_0 = p(0)$, $a_1 = \frac{p(1)-p(-1)}{2}$, $a_2 = \frac{p(1)+p(-1)}{2} - p(0)$. Dakle,

$$(Qp)(x) = p(0) + \frac{p(1) - p(-1)}{2}x + \left(\frac{p(1) + p(-1)}{2} - p(0)\right)x^2.$$

Imamo

$$\begin{aligned}
(Q(\alpha p + \beta q))(x) &= (\alpha p + \beta q)(0) + \frac{(\alpha p + \beta q)(1) - (\alpha p + \beta q)(-1)}{2}x +\\
&\quad \left(\frac{(\alpha p + \beta q)(1) + (\alpha p + \beta q)(-1)}{2} - (\alpha p + \beta q)(0)\right)x^2\\
&= \alpha\left(p(0) + \frac{p(1) - p(-1)}{2}x + \left(\frac{p(1) + p(-1)}{2} - p(0)\right)x^2\right)\\
&\quad + \beta\left(q(0) + \frac{q(1) - q(-1)}{2}x + \left(\frac{q(1) + q(-1)}{2} - q(0)\right)x^2\right)\\
&= \alpha(Qp)(x) + \beta(Qq)(x)\\
&= (\alpha Q(p) + \beta Q(q))(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Stoga je $Q(\alpha p + \beta q) = \alpha Q(p) + \beta Q(q)$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathcal{P}_3$. Dakle, Q je linearni operator.

ZADATAK 1.8. Postoji li linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ takav da vrijedi:

(a) $A(1, 2, 3) = (1, 1)$ i $A(2, 4, 6) = (2, 3)$?

(b) $A(1, 0, 0) = (1, 1)$ i $A(2, 0, 0) = (2, 2)$?

(c) $A(1, 0, 1) = (2, 1)$, $A(1, 1, 0) = (1, 2)$, $A(0, 1, -1) = (0, 1)$.

RJEŠENJE

(a) Ukoliko bi takav linearan operator postojao, vrijedilo bi

$$A(2,4,6) = A(2(1,2,3)) = 2A(1,2,3) = 2(1,1) = (2,2).$$

Kako je u zadatku zadano da je $A(2,4,6) = (2,3)$ zaključujemo da takav linearan operator A ne postoji.

(b) Uočimo da je $(2,0,0) = 2(1,0,0)$ i da je u ovom podzadatku $A(2,0,0) = 2A(1,0,0)$ pa nemamo problem kao u (a) dijelu zadatka. Primjer linearnog operatora koji zadovoljava uvjet zadatka je

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1).$$

Za zadaću dokažite da je ovako definirana funkcija zaista linearni operator. Uočite da postoje i drugi linearni operatori koji zadovoljavaju uvjete zadatka, npr.

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2).$$

Pokušajte smisliti još neki primjer linearnog operatora koji zadovoljava uvjete zadatka.

(c) Uočimo da vrijedi $(1,0,1)+(0,1,-1) = (1,1,0)$. Ako postoji linearni operator koji zadovoljava uvjete zadatka, onda mora vrijediti

$$A(1,0,1) + A(0,1,-1) = A(1,1,0),$$

tj. $(2,1) + (0,1) = (1,2)$. Budući da smo došli do kontradikcije, zaključujemo da ne postoji linearni operator koji zadovoljava uvjete zadatka.

$\square$

Zadatak 1.9. Neka je $A : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ linearni operator takav da je

$$A\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}, \ A\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 4\end{bmatrix}.$$

Odredite $A\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}\right)$ i $A\left(\begin{bmatrix}5 & 5\\2 & 5\end{bmatrix}\right)$. Za koje matrice $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ možemo iz zadanih podataka odrediti $A\left(\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\right)$.

Rješenje Uočimo da je

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\2 & 0\end{bmatrix} = 2\cdot\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

pa je

$$A\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}\right) = 2A\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\right) - 2A\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 4\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & -2\\-2 & 0\end{bmatrix}.$$

Nadalje, vrijedi

$$\begin{bmatrix}5 & 5\\2 & 5\end{bmatrix} = 2\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

pa je

$$A\left(\begin{bmatrix}5 & 5\\2 & 5\end{bmatrix}\right) = 2A\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\right) + 3A\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 4\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9 & 8\\13 & 20\end{bmatrix}.$$

Uočimo da za sve matrice oblika $\lambda \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (isključivo za takve matrice) možemo odrediti njihovu sliku iz zadanih podataka. Vrijedi

$$A\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \lambda A\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + \mu A\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 3\mu & 2\lambda + \mu \\ 3\lambda + 2\mu & 4\lambda + 4\mu \end{bmatrix}.$$

□

ZADATAK 1.10. Neka je $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linearni operator takav da je

$$A(1,1,1) = (2,3), \; A(1,0,1) = (1,1) \; A(0,1,1) = (0,0).$$

Možemo li iz zadanih podataka potpuno odrediti linearni operator A, tj. odrediti $A(x_1, x_2, x_3)$ za proizvoljni vektor $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$?

RJEŠENJE Uočimo da je skup $\{(1,1,1), (1,0,1), (0,1,1)\}$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Za $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ vrijedi

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3)(1,1,1) + (x_3 - x_2)(1,0,1) + (x_3 - x_1)(0,1,1)$$

pa je

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_2 - x_3)A(1,1,1) + (x_3 - x_2)A(1,0,1) + (x_3 - x_1)A(0,1,1) \\ &= (x_1 + x_2 - x_3)(2,3) + (x_3 - x_2)(1,1) + (x_3 - x_1)(0,0) \\ &= (2x_1 + x_2 - x_3, 3x_1 + 2x_2 - 2x_3). \end{aligned}$$

ČINJENICE 1.4. Neka su V, W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$, $\dim V = n < \infty$, $\{b_1, \ldots, b_n\}$ baza za V, $(w_1, \ldots, w_n)$ bilo koja uređena n–torka vektora iz W. Tada postoji jedinstveni linearni operator $A : V \to W$ takav da je

$$Ab_i = w_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

ZADATAK 1.11. Neka je $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearni operator zadan s $A(x,y) = (x + 2y, 2x - y)$. Odredite $A(M)$, gdje je $M \leq \mathbb{R}^2$.

RJEŠENJE Budući da je $\mathbb{R}^2$ dvodimenzionalan vektorski prostor, njegovi potprostori mogu imati dimenziju $0, 1$ ili 2.

(i) Ako je $\dim M = 0$, onda je $M = \{(0,0)\}$ pa je $A(M) = \{A(0,0)\} = \{(0,0)\}$.

(ii) Ako je $\dim M = 1$, onda je M pravac kroz ishodište, tj. $M = \{(x, kx) : x \in \mathbb{R}\}$ za neki $k \in \mathbb{R}$. Stoga je

$$A(M) = \{A(x, kx) : x \in \mathbb{R}\} = \{(x + 2kx, 2x - kx) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1 + 2k, 2 - k) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Uočimo da za svaki $k \in \mathbb{R}$ vrijedi $(1 + 2k, 2 - k) \neq (0,0)$ pa je $A(M)$ jednodimenzionalni potprostor od $\mathbb{R}^2$, tj. $A(M)$ je pravac kroz ishodište. Za domaću zadaću odredite jednadžbu tog pravca u ovisnosti o $k \in \mathbb{R}$.

(iii) Ako je $\dim M = 2$, onda je $M = \mathbb{R}^2$ pa je $A(M) = A(\mathbb{R}^2) = \{(x + 2y, 2x - y) : x, y, \in \mathbb{R}\} = \{x(1,2) + y(2,-1) : x, y \in \mathbb{R}\} = [\{(1,2), (2,-1)\}] = \mathbb{R}^2$.

Napomena 1.5. Uočimo da su u prethodnom zadatku svi skupovi $A(M)$ potprostori od $\mathbb{R}^2$ te da je $\dim M = \dim A(M)$. Na predavanjima se dokazuje da je za svaki linearni operator slika potprostora domene uvijek potprostor kodomene, no slika potprostora neće uvijek imati istu dimenziju kao i taj potprostor. Na primjer, za linearni operator $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadan sa $B(x,y) = (x, 2x)$ vrijedi $B(\mathbb{R}^2) = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\} = [\{(1,2)\}]$, dakle B preslikava dvodimenzionalni vektorski prostor $\mathbb{R}^2$ u jednodimenzionalan potprostor. Uočite da linearni operator B nije niti injekcija niti surjekcija, dok je linearni operator A bijekcija.

Zadatak 1.12. Neka je $\{e_1, e_2\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^2$, $f_1 = (1,1)$, $f_2 = (1,2)$. Neka su $A, B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearni operatori takvi da je

$$\begin{aligned} Ae_1 &= (1,-1),\ Ae_2 = (1,0) \\ Bf_1 &= (2,-1),\ Bf_2 = (3,-1). \end{aligned}$$

Obrazložite zašto su ovim podacima linearni operatori A i B jedinstveno određeni. Odredite Af_1, Af_2. Što možete zaključiti o operatorima A i B?

Rješenje Linearni operatori A i B su jedinstveno određeni jer su $\{e_1, e_2\}$ i $\{f_1, f_2\}$ baze vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$. Za proizvoljni vektor $v \in \mathbb{R}^2$ postoje jedinstveni skalari $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$v = \alpha e_1 + \beta e_2,\ v = \gamma f_1 + \delta f_2.$$

Tada je

$$Av = \alpha A e_1 + \beta A e_2 = (\alpha + \beta, -\alpha),\ Bv = \gamma B f_1 + \delta B f_2 = (2\gamma + 3\delta, -\gamma - \delta).$$

Vrijedi $Af_1 = A(e_1 + e_2) = Ae_1 + Ae_2 = (2,-1)$, $Af_2 = A(e_1 + 2e_2) = Ae_1 + 2Ae_2 = (3,-1)$. Vidimo da je $Af_1 = Bf_1$ i $Af_2 = Bf_2$, odnosno linearni operatori A i B se podudaraju na bazi. Kako je svaki linearni operator jedinstveno zadan svojim djelovanjem na bazi, zaključujemo da je $A = B$. □

Zadatak 1.13. Postoje li skalari $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ takvi da za neki linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ vrijedi

$$A(1,2,-1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A(0,2,2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\ A(1,3,0) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ A(1,1,1) = \begin{bmatrix} e & f \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ako postoje, odredite sve takve skalare.

Rješenje Prvo promotrimo linearnu (ne)zavisnost vektora domene na kojima je zadano djelovanje od A. Prvo uočimo da je $(1,3,0) = (1,2,-1) + \frac{1}{2}(0,2,2)$ pa mora vrijediti

$$A(1,3,0) = A(1,2,-1) + \frac{1}{2} A(0,2,2),$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Dakle, mora vrijediti $a = 2, b = 2, c = 1, d = 2$.

Sada uočimo da je skup $\{(1,2,-1), (0,2,2), (1,1,1)\}$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$, pa će za $a = 2, b = 2, c = 1, d = 2$, te proizvoljne $e, f \in \mathbb{R}$, A biti dobro definiran i potpuno određen linearan operator. Za domaću zadaću odredite $A(x_1, x_2, x_3)$ za proizvoljni (x_1, x_2, x_3) u ovisnosti o parametrima $e, f \in \mathbb{R}$. □

ZADATAK 1.14. Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor, $\dim V = n$ i $A : V \to V$ linearni operator takav da je $A^n = 0$ i $A^{n-1} \neq 0$. Dokažite da postoji vektor $e \in V$ takav da je skup $B = \{e, Ae, A^2e, \cdots, A^{n-1}e\}$ baza za V.

RJEŠENJE Kako je $A^{n-1} \neq 0$, postoji $e \in V, e \neq 0$ takav da je $A^{n-1}e \neq 0$. Dokažimo da je skup $\{e, Ae, A^2e, \cdots, A^{n-1}e\}$ baza za V.
Uočimo najprije da je $A^k e \neq 0$ za $k = 1, \cdots, n-2$. Zaista, kad bi bilo $A^k e = 0$ za neki $k \in \{1, \cdots, n-2\}$, onda je

$$A^{n-1}e = A^{n-k-1}(A^k e) = A^{n-k-1}(0) = 0,$$

što je kontradikcija. Dokažimo da su vektori $e, Ae, A^2e, \cdots, A^{n-1}e$ linearno nezavisni

$$\alpha_1 e + \alpha_2 Ae + \cdots + \alpha_n A^{n-1}e = 0 \quad /A^{n-1}$$
$$\alpha_1 \underbrace{A^{n-1}e}_{\neq 0} + \alpha_2 \underbrace{A^n e}_{0} + \cdots + \alpha_n \underbrace{A^{2n-2}e}_{0} = 0,$$

iz čega proizlazi $\alpha_1 = 0$. Sada imamo

$$\alpha_2 Ae + \cdots + \alpha_n A^{n-1}e = 0 \quad /A^{n-2}$$
$$\alpha_2 \underbrace{A^{n-1}e}_{\neq 0} + \cdots + \alpha_n \underbrace{A^{2n-3}e}_{0} = 0,$$

iz čega proizlazi $\alpha_2 = 0$. Analogno dobijemo $\alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$. Dakle, za proizvoljni $e \in V, e \neq 0$, za koji je $A^{n-1}e \neq 0$, skup $\{e, Ae, \cdots, A^{n-1}e\}$ je linearno nezavisan, n–člani skup, odnosno baza prostora V.

DZ 1.1. Provjerite jesu li sljedeća preslikavanja linearni operatori:

(a) $A : M_2 \to M_2$, $A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+1 & d+a \end{pmatrix}$,

(b) $A : M_2 \to M_2$, $A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+2d & d+a \end{pmatrix}$,

(c) Preslikavanje koje matrici A pridružuje zbroj njenih redaka (zapišite to preslikavanje pomoću množenja matrica).

(d) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 2x_1 - 3x_3)$.

(e) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $A(x, y) = (x, y, xy)$,

(f) $h : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $h(p) = \int_a^b |p(t)| \mathrm{d}t$,

DZ 1.2. Provjerite jesu li sljedeća preslikavanja linearni funkcionali:

(a) $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $f(p) = \int_0^1 t^2 p(t) \mathrm{d}t$,

(b) $g : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $g(p) = \int_0^1 r(t)p(t) \mathrm{d}t$, gdje je $r \in \mathcal{P}$ fiksirani polinom,

(c) $h : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $h(p) = \int_a^b p(t) \mathrm{d}t$,

(d) $k : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $k(p) = \int_0^1 p(t) \mathrm{d}t + 1$,

(e) Preslikavanje koje matrici A pridružuje zbroj svih njenih elementa (zapišite to preslikavanje pomoću množenja matrica).

Poglavlje 2

Vektorski prostor $L(V, W)$. Dualni prostor

Uvedimo oznaku

$$L(V, W) = \{A : V \to W \mid A \text{ je linearan operator}\}.$$

Uz operacije

$$(A + B)x = Ax + Bx$$
$$(\alpha A)x = \alpha Ax, \quad \alpha \in \mathbb{F}$$

je $L(V, W)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Ako su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori, onda je $\dim L(V, W) = \dim V \cdot \dim W$.

Činjenice 2.1.

1. Ako je $V = W$, onda umjesto $L(V, V)$ pišemo $L(V)$.
2. $L(V)$ je vektorski prostor. Ako je $\dim V < \infty$, onda je $\dim L(V) = (\dim V)^2$.
3. $L(V)$ ima i bogatiju strukturu: operatore iz $L(V)$ možemo komponirati. Definiramo

$$A \circ B = AB : V \to V, \quad (AB)(x) = A(B(x)).$$

4. Komponiranje operatora je

   1) asocijativno: $A(BC) = (AB)C$,
   2) kvaziasocijativno: $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$,
   3) distributivno prema zbrajanju: $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$,
   4) postoji neutralni element: $IA = AI = A$, gdje je $I(x) = x$ jedinični operator,

   pa kažemo da je $L(V)$ **asocijativna algebra s jedinicom**. Naglasimo da komutativnost kompozicije ne vrijedi.

5. $GL(V) = \{A \in L(V) : A \text{ je bijekcija}\}$ je skup svih regularnih operatora (izomorfizama) na V.

Zadatak 2.1. Neka su $F, G, H \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ zadani formulama

$$F(x, y, z) = (2x + z, x + y)$$
$$G(x, y, z) = (2y, x)$$
$$H(x, y, z) = (x + y + z, x + y)$$

Dokažite da su F, G, H linearno nezavisni operatori.

RJEŠENJE Neka je $\alpha F + \beta G + \gamma H = 0$. Sada imamo

$$(\alpha F + \beta G + \gamma H)(x, y, z) = 0(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \tag{2.1}$$

tj.

$$(\alpha(2x + z) + \beta(2y) + \gamma(x + y + z), \alpha(x + y) + \beta x + \gamma(x + y)) = (0, 0),$$

odnosno

$$(2\alpha + \gamma)x + (2\beta + \gamma)y + (\alpha + \gamma)z = 0 \text{ i } (\alpha + \beta + \gamma)x + (\alpha + \gamma)y = 0.$$

S obzirom da gornje jednakosti vrijede za sve $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pa specijalno i za kanonsku bazu od $\mathbb{R}^3$, imamo

$$2\alpha + \gamma = 2\beta + \gamma = \alpha + \gamma = \alpha + \beta + \gamma = 0,$$

odakle dobivamo $\alpha = \beta = \gamma = 0$, tj. F, G, H su linearno nezavisni operatori.

NAPOMENA 2.2. Ideja u prethodnom zadatku je bila da od homogenog sustava s beskonačno mnogo jednadžbi (ali konačno mnogo nepoznanica) dobijemo homogeni sustav od konačno mnogo jednadžbi koji ima isti skup rješenja kao beskonačni sustav. Taj sustav ima ili jedinstveno rješenje (pa je skup linearnih operatora nezavisan) ili ima beskonačno mnogo rješenja (pa su operatori zavisni).
U prethodnom zadatku smo uvrstili samo vektore baze za $\mathbb{R}^3$ u (2.1). Pokažimo da je to bilo dovoljno. Pitamo se jesu li linearni operatori $F_1, \ldots, F_k \in L(V, W)$ linearno nezavisni. Neka je $\{a_1, \ldots, a_n\}$ baza za V i neka je

$$\alpha_1 F_1 + \ldots + \alpha_k F_k = 0.$$

Tada je

$$\alpha_1 F_1(x) + \ldots + \alpha_k F_k(x) = 0, \quad \forall x \in V. \tag{2.2}$$

Posebno je

$$\begin{aligned} \alpha_1 F_1(a_1) + \ldots + \alpha_k F_k(a_1) &= 0 \\ \alpha_1 F_1(a_2) + \ldots + \alpha_k F_k(a_2) &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_1 F_1(a_n) + \ldots + \alpha_k F_k(a_n) &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ako je $x \in V$ proizvoljan, on se može zapisati kao $x = \sum_{i=1}^n \beta_i a_i$. Pomnožimo li i–tu jednadžbu u (2.3) s β_i i onda zbrojimo sve jednadžbe, dobivamo upravo

$$\alpha_1 F_1 \left(\sum_{i=1}^n \beta_i a_i \right) + \ldots + \alpha_k F_k \left(\sum_{i=1}^n \beta_i a_i \right) = 0,$$

tj. dobivamo (2.2).

ZADATAK 2.2. Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ ortonormirana baza prostora $V^2(O)$. Zadani su sljedeći operatori iz prostora $L(V^2(O))$: Z je zrcaljenje s obzirom na os x, P ortogonalna projekcija na os y, a R rotacija oko ishodišta za kut od 60°.

(a) Može li se svaki operator $A \in L(V^2(O))$ prikazati kao linearna kombinacija operatora Z, P i R?

b) Ako je odgovor u (a) negativan, može li se odabrati još neki operator S koji predstavlja rotaciju oko ishodišta za neki kut, tako da svaki $A \in L(V^2(O))$ ima prikaz pomoću Z, P, R i S?

Rješenje

(a) Uočimo da je $\dim L(V^2(O)) = (\dim V^2(O))^2 = 4$, a $\dim[\{Z, P, R\}] = 3$ pa se ne može svaki operator $A \in L(V^2(O))$ prikazati kao linearna kombinacija operatora Z, P i R. Za zadaću navedite neki konkretni primjer linearnog operatora na $V^2 0$ koji se ne može prikazati kao linearna kombinacija operatora Z, P i R.

(b) Prisjetimo se da je operator rotacije ravnine oko ishodišta za kut φ dan s

$$\begin{aligned} R_\varphi(x\vec{i} + y\vec{j}) &= (x\cos\varphi - y\sin\varphi)\vec{i} + (x\sin\varphi + y\cos\varphi)\vec{j} \\ &= \cos\varphi(x\vec{i} + y\vec{j}) + \sin\varphi(-y\vec{i} + x\vec{j}). \end{aligned}$$

Nadalje,

$$Z(x\vec{i} + y\vec{j}) = x\vec{i} - y\vec{j},\ P(x\vec{i} + y\vec{j}) = y\vec{j}.$$

Neka je S operator koji predstavlja rotaciju oko ishodišta za neki kut φ. Uočimo da vrijedi

$$[\{Z, P, R, S\}] = [\{Z, P, Q\}],$$

gdje je Q zadan s $Q(x\vec{i} + y\vec{j}) = -y\vec{i} + x\vec{j}$. Zaista,

$$R = \frac{1}{2}(Z + 2P) + \frac{\sqrt{3}}{2}Q,\ S = \cos\varphi \cdot (Z + 2P) + \sin\varphi \cdot Q.$$

□

Zadatak 2.3. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor dimenzije $n \neq 0$, $S \in L(V)$ takav da je $ST = TS$ za sve $T \in L(V)$. Dokažite da je tada $S = \lambda I_V$ za neki $\lambda \in \mathbb{F}$.

Rješenje Neka je $(e) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ neka baza za V. Definiramo operatore $E_{ij} \in L(V)$ na bazi (e) s

$$E_{ij}(e_k) = \delta_{kj}e_i. \quad i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

(Na predavanjima ste dokazali da je to baza za $L(V)$.) Tada je

$$SE_{ij}(e_k) = E_{ij}S(e_k) \quad \forall i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

tj.

$$\delta_{kj}S(e_i) = E_{ij}S(e_k) \quad \forall i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Za $j = k$ dobijemo

$$S(e_i) = E_{ij}S(e_j) \quad \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Neka je $S(e_j) = \alpha_{1j}e_1 + \alpha_{2j}e_2 + \ldots + \alpha_{nj}e_n$. Tada je

$$S(e_i) = E_{ij}S(e_j) = E_{ij}(\alpha_{1j}e_1 + \alpha_{2j}e_2 + \ldots + \alpha_{nj}e_n) = \alpha_{jj}e_i \quad \forall i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$$

It toga vidimo da je $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \ldots = \alpha_{nn} = \lambda$ za neki $\lambda \in \mathbb{F}$ pa je

$$S(e_i) = \lambda e_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots n\},$$

odnosno $S = \lambda I_V$. □

Činjenice 2.3. 1. $V^* := L(V, \mathbb{F})$ dualni prostor of V.

2. Ako je $\dim V < \infty$, onda je $\dim V^* = \dim V$ pa su V i V^* izomorfni.

3. Konstrukcija izomorfizma između V i V^*:

   Neka je $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza za V. Tada je baza za V^* dana funkcionalima $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$, gdje su

$$e_j^*(e_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}, \quad j,k = 1, \ldots, n.$$

   Tu bazu označavamo s B^* i zovemo **dualna baza** bazi B. Baza B^* je jednoznačno određena bazom B i ovisi o njoj! Izomorfizam između V i V^* je sada dan s $A : V \to V^*$, $A(e_i) = e_i^*$, $i = 1, \ldots, n$.

4. Ako je $\dim V < \infty$, onda je $\dim V^{**} = \dim V$. Izomorfizam između V i V^{**} konstruiramo prirodno, bez poziva na bazu: $\Phi : V \to V^{**}$, $\Phi(x) = \hat{x}$, gdje je $\hat{x} : V^* \to \mathbb{F}$, $\hat{x}(f) = f(x)$.

Zadatak 2.4. U $\mathbb{R}^3$ su zadani vektori $a_1 = (1,0,0)$, $a_2 = (1,1,-1)$, $a_3 = (0,1,1)$. Dokažite da ti vektori čine bazu za $\mathbb{R}^3$ i nađite toj bazi dualnu bazu $\{a_1^*, a_2^*, a_3^*\}$. Odredite i $a_i^*(e_j)$, $i,j = 1,2,3$, gdje su e_1, e_2, e_3 vektori kanonske baze za $\mathbb{R}^3$.

Rješenje DZ: Provjeriti da su a_1, a_2, a_3 linearno nezavisni.
Baza $\{a_1^*, a_2^*, a_3^*\}$ određena je s $a_i^*(a_j) = \delta_{ij}$, $\forall i,j$. Neka je $x = \sum_{i=1}^3 \alpha_i a_i \in \mathbb{R}^3$. Tada je

$$a_1^*(x) = a_1^*\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i a_1^*(a_i) = \alpha_1.$$

Analogno je $a_2^*(x) = \alpha_2$, $a_3^*(x) = \alpha_3$.
Želimo znati kako f djeluje na $x = (x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 x_i e_i$ zapisan u kanonskoj bazi. Prikažimo $x = (x_1, x_2, x_3)$ u bazi $\{a_1, a_2, a_3\}$.

$$(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(1,1,-1) + \alpha_3(0,1,1) = (\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, -\alpha_2+\alpha_3).$$

Rješavanjem sustava dobijemo

$$x = (x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right) a_1 + \left(\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right) a_2 + \left(\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right) a_3.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} a_1^*(x_1, x_2, x_3) &= x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ a_2^*(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ a_3^*(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{aligned}$$

Posebno je

$$\begin{array}{lll} a_1^*(e_1) = 1 & a_2^*(e_1) = 0 & a_3^*(e_1) = 0 \\ a_1^*(e_2) = -\frac{1}{2} & a_2^*(e_2) = \frac{1}{2} & a_3^*(e_2) = \frac{1}{2} \\ a_1^*(e_3) = \frac{1}{2} & a_2^*(e_3) = -\frac{1}{2} & a_3^*(e_3) = \frac{1}{2} \end{array}$$

DZ 2.1. U $\mathbb{R}^3$ su zadani vektori $a_1 = (1, -1, 3)$, $a_2 = (0, 1, -1)$, $a_3 = (0, 3, -2)$. Dokažite da ti vektori čine bazu za $\mathbb{R}^3$ i nađite toj bazi dualnu bazu $\{a_1^*, a_2^*, a_3^*\}$. Odredite i $a_i^*(e_j)$, $i, j = 1, 2, 3$, gdje su e_1, e_2, e_3 vektori kanonske baze za $\mathbb{R}^3$.

Zadatak 2.5. Neka je $\mathcal{P}_2 = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, p \text{ polinom } \operatorname{st} p \le 2\}$. Neka je $f^* : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$, $f^*(p) = p(0)$. Dokažite da je $f^* \in \mathcal{P}_2^*$. Nadalje, neka je $B = \{1, 1-t, 1-t^2\}$ baza za $\mathcal{P}_2$. Prikažite f^* u dualnoj bazi od B.

Rješenje Dokaz da je f^* linearan:

$$f^*(\alpha p + \beta q) = (\alpha p + \beta q)(0) = \alpha p(0) + \beta q(0) = \alpha f^*(p) + \beta f^*(q).$$

Dualna baza od B: neka su njeni vektori označeni s $\{p_1^*, p_2^*, p_3^*\}$. Vrijedi da je $p_i^*(p_j) = \delta_{ij}$.
Kako je $f^* \in V^*$, postoje $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, takvi da je

$$f^* = \alpha p_1^* + \beta p_2^* + \gamma p_3^*.$$

Uočimo da je $f^*(p_1) = \alpha, f^*(p_2) = \beta, f^*(p_3) = \gamma$. Stoga je $\alpha = p_1(0) = 1, \beta = p_2(0) = 1, \gamma = p_3(0) = 1$. Dakle,

$$f^* = p_1^* + p_2^* + p_3^*.$$

□

DZ 2.2. Neka je $f^* : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f^*(A) = \operatorname{tr}(A)$. Neka je $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ baza od $M_2(\mathbb{R})$. Prikažite f^* u dualnoj bazi baze B.

Rješenje Ako je dana baza $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, tada je $f^* = A_1^*$. □

Zadatak 2.6. U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^3)^*$ dana je baza $\{a_1^*, a_2^*, a_3^*\}$:

$$a_1^*(x, y, z) = y, \;\; a_2^*(x, y, z) = x - y, \;\; a_3^*(x, y, z) = x + z.$$

Nađite bazu $\{a_1, a_2, a_3\}$ za $\mathbb{R}^3$ kojoj je $\{a_1^*, a_2^*, a_3^*\}$ dualna baza.

Rješenje Neka je

$$\begin{aligned} a_1 &= (x_1, x_2, x_3) \\ a_2 &= (y_1, y_2, y_3) \\ a_3 &= (z_1, z_2, z_3) \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned} &1 = a_1^*(a_1) = x_2, \quad 0 = a_1^*(a_2) = y_2, \quad 0 = a_1^*(a_3) = z_2 \\ &0 = a_2^*(a_1) = x_1 - x_2, \quad 1 = a_2^*(a_2) = y_1 - y_2, \quad 0 = a_2^*(a_3) = z_1 - z_2 \\ &0 = a_3^*(a_1) = x_1 + x_3, \quad 0 = a_3^*(a_2) = y_1 + y_3, \quad 1 = a_3^*(a_3) = z_1 + z_3 \end{aligned}$$

Rješavanjem ovog sustava dobivamo

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 1, -1) \\ a_2 &= (1, 0, -1) \\ a_3 &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Za zadaću provjerite da je $\{a_1, a_2, a_3\}$ zaista baza za $\mathbb{R}^3$. Jesmo li mogli i bez rješavanja sustava zaključiti da postoji baza kojoj je dana baza dualna? Zašto? □

Napomena 2.4. Neka je $V = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, i neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^n$. Tražimo opći oblik linearnog funkcionala na $\mathbb{R}^n$. Neka je $f \in (\mathbb{R}^n)^*$. Tada je

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,$$

za neke $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Prema tome, linearni funkcionali na $\mathbb{R}^n$ su polinomi prvog stupnja u n varijabli bez slobodnog člana.

Poglavlje 3

Teorem o rangu i defektu

ČINJENICE 3.1. Neka je $A : V \to W$ linearan operator.

1. $\operatorname{Im} A = A(V) = \{Av : v \in V\} \leq W$ je **slika** operatora A.
2. $\operatorname{Ker} A = A^{-1}(\{0\}) = \{x \in V : Ax = 0\} \leq V$ je **jezgra** operatora A.
3. Ako su V, W konačnodimenzionalni, onda su i $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Ker} A$ konačnodimenzionalni i uvodimo oznake
$$\begin{aligned} \mathrm{r}(A) &:= \dim \operatorname{Im} A \quad \text{je } \textbf{rang operatora } A, \\ \mathrm{d}(A) &:= \dim \operatorname{Ker} A \quad \text{je } \textbf{defekt operatora } A. \end{aligned}$$
4. Vrijedi
$$\begin{aligned} A \text{ je injekcija} \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker} A = \{0\}, \\ A \text{ je surjekcija} \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{Im} A = W. \end{aligned}$$
5. Linearan operator koji je injekcija zovemo **monomorfizam**, linearan operator koji je surjekcija zovemo **epimorfizam**, a linearan operator koji je bijekcija zovemo **izomorfizam**.

ZADATAK 3.1. Neka je $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ linearni operator zadan formulom
$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 - x_3, x_1 - 4x_2 + 2x_3, 3x_1 - x_2)\,.$$
Pronađite $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A$, $\mathrm{d}(A)$, $\mathrm{r}(A)$ te po jednu bazu za $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A$.

RJEŠENJE Primijetimo da je
$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} A &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\right\} \\ &= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0, 2x_1 - x_3 = 0, x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, 3x_1 - x_2 = 0\right\}. \end{aligned}$$
Rješavanjem prethodnog homogenog sustava dobivamo da je $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ jedino rješenje. Dakle, $\operatorname{Ker} A = \{(0,0,0)\}$ pa je $\mathrm{d}(A) = 0$ (A je monomorfizam).
$$\begin{aligned} \operatorname{Im} A &= \left\{Ax : x \in \mathbb{R}^3\right\} = \{(x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 - x_3, x_1 - 4x_2 + 2x_3, 3x_1 - x_2) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1,2,1,3) + x_2(-1,0,-4,-1) + x_3(1,-1,2,0) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$
pa vektori $(1,2,1,3)$, $(-1,0,-4,-1)$, $(1,-1,2,0)$ generiraju $\operatorname{Im} A$. Ispitajmo njihovu linearnu nezavisnost i vidimo da su nezavisni pa čine bazu za $\operatorname{Im} A$. Dakle, $\mathrm{r}(A) = 3$. □

Uočite da u prethodnom zadatku vrijedi

$$\mathrm{r}(A) + \mathrm{d}(A) = 3 + 0 = 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

Ta tvrdnja vrijedi i općenito.

Teorem 3.2 (o rangu i defektu)**.** *Neka je* $A : V \to W$ *linearni operator,* $\dim V < \infty$. *Tada je*

$$\mathrm{r}(A) + \mathrm{d}(A) = \dim V.$$

NAPOMENA 3.3. Vrijedi i sljedeći korolar. Ako je $A : V \to W$ linearni operator i $\dim V = \dim W < \infty$, tada je ekvivalentno:

(1) A je monomorfizam,

(2) A je epimorfizam,

(3) A je izomorfizam.

U prethodnom zadatku je $\dim \mathbb{R}^3 \neq \dim \mathbb{R}^4$ pa smo imali da je A monomorfizam, ali nije epimorfizam.

Za linearne funkcionale vrijedi da je $r(f) \in \{0, 1\}$ jer je $\mathrm{Im}\, f \subseteq \mathbb{F}$. Prema teoremu o rangu i defektu je onda $d(f) \in \{\dim V, \dim V - 1\}$. Preciznije:

1) $r(f) = 0$ akko je $f = 0$ nul-funkcional. Tada je $d(f) = \dim V$.

2) $r(f) = 1$ akko je f surjekcija. Tada je $d(f) = \dim V - 1$.

ZADATAK 3.2. Neka je $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ i $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ linearni operator dan s

$$f(A) = AB - BA.$$

Pronađite $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{d}(f)$, $\mathrm{r}(f)$, te po jednu bazu za $\mathrm{Ker}\, f$ i $\mathrm{Im}\, f$.
RJEŠENJE raspisati na ploči

ZADATAK 3.3. Neka je $\mathcal{P}_3 = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ polinom} | \operatorname{st} p \leq 3\}$ i $Q : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$, $Qp =$ polinom stupnja 2 čiji graf prolazi točkama $(-1, p(-1))$, $(0, p(0))$, $(1, p(1))$. Odredite baze za $\mathrm{Ker}\, Q$, $\mathrm{Im}\, Q$, te $\mathrm{d}(Q)$, $\mathrm{r}(Q)$.
RJEŠENJE Za ovaj zadatak smo već ranije odredili formulu

$$(Qp)(x) = p(0) + \frac{p(1) - p(-1)}{2} x + \left(\frac{p(1) + p(-1)}{2} - p(0) \right) x^2.$$

Vrijedi da je $p \in \mathrm{Ker}\, Q$ akko je $Qp = 0$ akko je

$$\begin{aligned} a_0 &= p(0) = 0 \\ a_1 &= \frac{p(1) - p(-1)}{2} = 0 \\ a_2 &= \frac{p(1) + p(-1)}{2} - p(0) = 0 \end{aligned}$$

akko je $p(-1) = p(0) = p(1) = 0$. Ako je $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, onda mora biti

$$\begin{aligned} 0 &= a \\ 0 &= a - b + c - d \\ 0 &= a + b + c + d \end{aligned}$$

pa je $a = c = 0$ i $b = -d$ pa je $p \in \operatorname{Ker} Q$ ako i samo ako je $p(x) = bx - bx^3$, $b \in \mathbb{R}$.
Dakle, baza za $\operatorname{Ker} Q$ je $\{x - x^3\}$ pa je $\mathrm{d}(Q) = 1$. Po teoremu o rangu i defektu je

$$4 = \dim \mathcal{P}_3 = 1 + \mathrm{r}(Q)$$

pa je $\mathrm{r}(Q) = 3$. No, $\operatorname{Im} Q \leq \mathcal{P}_2$, $\dim \mathcal{P}_2 = 3$ pa je $\operatorname{Im} Q = \mathcal{P}_2$. Dakle, Q je surjekcija. $\square$

Zadatak 3.4. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor (KDVP) i $M \leq V$, $M \neq \{0\}$, $M \neq V$. Postoji li linearan operator $A : V \to V$ takav da je

(a) $\operatorname{Ker} A = M$?

(b) $\operatorname{Im} A = M$?

(c) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} A = M$?

Rješenje Neka je $\dim V = n$, $\dim M = k \in \{1, \ldots, n-1\}$ te neka je $\{a_1, \ldots, a_k\}$ baza za M. Nadopunimo je do baze za V: $\{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n\}$.

(a) Zadajmo $A : V \to V$ na bazi kao

$$A(a_1) = \ldots = A(a_k) = 0, \quad A(a_{k+1}) = a_{k+1}, \ \ldots, \ A(a_n) = a_n$$

i proširimo po linearnosti. Dokažimo da je $\operatorname{Ker} A = M$.

Ako je $x \in M$, onda je $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i$ pa je $A(x) = 0$.

Obratno, neka je $x \in \operatorname{Ker} A$. Tada je $Ax = 0$. No x možemo zapisati u bazi od V kao $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$. Tada je

$$0 = Ax = A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A(a_i) = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i a_i.$$

Slijedi da je $\alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n = 0$ jer je $\{a_{k+1}, \ldots, a_n\}$ linearno nezavisan. Dakle, $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \in M$.

[DZ*] Dokažite da je $\operatorname{Ker} A = M$ ako i samo ako je $Aa_1 = \ldots = Aa_k = 0$ i $\{Aa_{k+1}, \ldots, Aa_n\}$ je linearno nezavisan skup.

(b) Zadajmo $A : V \to V$ na bazi kao

$$A(a_1) = a_1, \ \ldots, \ A(a_k) = a_k, \quad A(a_{k+1}) = \ldots = A(a_n) = 0$$

i proširimo po linearnosti. Dokažimo da je $\operatorname{Im} A = M$.

Kako je $\{a_1, \ldots, a_n\}$ baza za V to je $\{Aa_1, \ldots, Aa_n\}$ sustav izvodnica za za $\operatorname{Im} A$. Dakle, $\operatorname{Im} A = [\{Aa_1, \ldots, Aa_n\}] = [\{a_1, \ldots, a_k\}] = M$.

(c) Uočimo najprije sljedeće: ako je $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} A = M$, onda je

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = 2 \dim M.$$

Dakle, $\dim V$ mora biti paran broj, i to $\dim V = 2 \dim M$. Neka je $\{a_1, \ldots, a_k\}$ baza za M i $\{b_1, \ldots, b_k\}$ nadopuna do baze za V. Zadajmo $A : V \to V$ na bazi kao

$$A(a_1) = \ldots = A(a_k) = 0, \quad A(b_1) = a_1, \; \ldots, \; A(b_k) = a_k$$

i proširimo po linearnosti. Kao i prije vidimo da je $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} A = M$ (DZ).

[DZ*] Dokažite da je $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} A = M$ ako i samo ako je $\dim V = 2 \dim M$, $Aa_1 = \ldots = Aa_k = 0$ i $\{Aa_{k+1}, \ldots, Aa_n\}$ je baza za M.

Zadatak 3.5. Postoji li linearni operator sa zadanim svojstvom:

(a) $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ takav da je $\operatorname{Ker} A = \{(x_1, x_2, 1, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$?

(b) $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ takav da je $\operatorname{Ker} A = [\{(x_1, x_2, 1, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}]$?

(c) $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ takav da je $\operatorname{Im} A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_1| \geq 1\}$?

(d) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takav da je $\operatorname{Im} A = [\{(1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 + x_3 = 0\}]$?

Ako da, nađite primjer takvog linearnog operatora, a ako ne, obrazložite zašto.

Rješenje

(a) Ne, jer $\operatorname{Ker} A$ mora biti potprostor domene, a zadani skup to nije.

(b) Računanjem linearne ljuske slijedi da treba biti $\operatorname{Ker} A = \{(x_1, x_2, x_3, 0) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$, a ovo je potprostor čiju bazu čine e_1, e_2, e_3, prva tri elementa kanonske baze. Definiramo A djelovanjem na kanonskoj bazi. Mora biti $Ae_1 = Ae_2 = Ae_3 = 0$, a Ae_4 može biti bilo koji vektor različit od nulvektora, na primjer $Ae_4 = (1, 2, 3)$. Sada A proširimo po linearnosti.

(c) Ne, jer $\operatorname{Im} A$ mora biti potprostor kodomene.

(d) Računanjem linearne ljuske slijedi da treba biti $\operatorname{Im} A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 + x_3 = 0\}$, što je potprostor razapet vektorima $a_1 = (1, 0, 0)$ i $a_2 = (0, 1, -1)$. Skup $\{a_1, a_2\}$ nadopunimo vektorom $a_3 = (0, 0, 1)$ do baze za $\mathbb{R}^3$. Sada A definiramo na bazi kao $Aa_1 = a_1$, $Aa_2 = a_2$ i $Aa_3 = 0$.

Vratimo se još malo na izomorfizme. Kažemo da su prostori V i W **izomorfni** ako postoji izomorfizam $A : V \to W$. Oznaka: $V \simeq W$.

Činjenice 3.4.

1. Neka su V, W KDVP nad $\mathbb{F}$. Tada su V i W izomorfni akko je $\dim V = \dim W$.
2. Neka je $A : V \to V$, $\dim V < \infty$ (ili $A : V \to W$, $\dim V = \dim W < \infty$). Ekvivalentno je
   (a) A je izomorfizam,
   (b) A je monomorfizam,
   (c) A je epimorfizam.
3. $\simeq$ je relacija ekvivalencije.

Posljedica činjenice 1. je da nijedan pravi potprostor KDVP ne može biti izomorfan svojem potprostoru.

ZADATAK 3.6. (1) Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor dimenzije n, $A, B : V \to V$ linearni operatori takvi da je $AB = 0$. Dokažite da je $r(A) + r(B) \leq n$.

(2) Ako je $A : V \to V$ proizvoljan operator, dokažite da postoji linearni operator $B : V \to V$ takav da vrijedi $AB = 0$ i $r(A) + r(B) = n$.

RJEŠENJE

(1) Po teoremu o rangu i defektu imamo $r(A) + d(A) = n$. Dokažimo da je $\operatorname{Im} B \subseteq \operatorname{Ker} A$. Zaista, neka je $y \in \operatorname{Im} B$. Tada postoji $x \in V$ takav da je $y = Bx$. Tada je $Ay = ABx = O(x) = 0$ pa je $y \in \operatorname{Ker} A$. Dakle, $\operatorname{Im} B \subseteq \operatorname{Ker} A$, a onda je $r(B) \leq d(A)$, tj. $r(B) \leq n - r(A)$, odnosno $r(A) + r(B) \leq n$.

(2) Ideja je pronaći linearni operator $B : V \to V$ takav da je $\operatorname{Im} B = \operatorname{Ker} A$. Razlikujemo sljedeće slučajeve:

a) Ako je A je izomorfizam, onda je $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Za $B = 0$ vrijedi $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} B$.

b) Ako je $A = 0$, onda je $\operatorname{Ker} A = V$, onda možemo uzeti npr. $B = I$. Tada je $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} B$.

c) Ako A nije izomorfizam i $A \neq 0$, onda je $d(A) = k \in \{1, \cdots, n-1\}$. Neka je $\{a_1, \cdots, a_k\}$ baza za $\operatorname{Ker} A$. Nadopunimo tu bazu do baze za V $\{a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_n\}$. Definirajmo operator B na bazi sa

$$\begin{cases} B(a_i) = a_i, & i = 1, \cdots, k \\ B(a_i) = 0, & i = k+1, \cdots, n. \end{cases}$$

Tada je $\operatorname{Im} B = \operatorname{Ker} A$.

□

DZ 3.1. Neka je V n–dimenzionalan vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i neka je $\{a_1, \cdots a_n\}$ njegova baza. Dokažite da je $A : V \to \mathbb{F}^n$ zadan sa

$$A(a) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i\right) := (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

izomorfizam.

DZ 3.2. Neka je V vektorski prostor, $L, M \leq V$ takvi da je $L \cap M = \{0\}$. Dokažite da je

$$L \dotplus M \simeq L \times M$$

DZ 3.3. Neka je $A : U \to V$ linearni operator i neka je $L \leq U$. Dokažite da je

$$\dim L - d(A) \leq \dim A(L) \leq \dim L.$$

DZ 3.4. Neka su $A, B : V \to V$ linearni operatori. Dokažite

(a) A je surjekcija akko za svaki linearni operator $C : V \to V$ vrijedi $CA = 0 \Longrightarrow C = 0$.

(b) B je injekcija akko za svaki linearni operator $C : V \to V$ vrijedi $BC = 0 \Longrightarrow C = 0$.

ZADATAK 3.7. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, $P : V \to V$ linearni operator takav da je $P^2 = P$ (takav se linearan operator zove projektor). Dokažite:

(a) $a \in \operatorname{Im} P \Longleftrightarrow Pa = a$.

(b) Ako je $P \neq I$, onda P nije izomorfizam.

(c) $V = \operatorname{Ker} P \dot{+} \operatorname{Im} P$.

Rješenje

(a) ($\Rightarrow$) Ako je $a \in \operatorname{Im} P$, onda postoji $x \in V$ takav da je $a = Px$. Tada je

$$Pa = P(Px) = P^2x = Px = a.$$

($\Leftarrow$) Ako je $Pa = a$, onda je sigurno $a \in \operatorname{Im} P$.

(b) Prvo uočimo da vrijedi $I^2 = I$ pa je I projektor. Neka je $P \neq I$. Dokažimo da P nije surjekcija. Kako je $P \neq I$, postoji $x \in V$ takav da je $Px \neq Ix = x$. Tada, obratom po kontrapoziciji tvrdnje (a), vrijedi $x \notin \operatorname{Im} P$. Dakle, $\operatorname{Im} P \neq V$ pa P nije surjekcija.

(c) Pogledajmo sumu potprostora $\operatorname{Ker} P + \operatorname{Im} P$ i dokažimo da je ta suma direktna, tj. da je $\operatorname{Ker} P \cap \operatorname{Im} P = \{0\}$. Neka je $x \in \operatorname{Ker} P \cap \operatorname{Im} P$. Tada je $x \overset{x\in\operatorname{Im} P}{=} Px \overset{x\in\operatorname{Ker} P}{=} 0$.

Nadalje, $\operatorname{Ker} P \dot{+} \operatorname{Im} P \leq V$, a za dimenzije vrijedi

$$\dim(\operatorname{Ker} P \dot{+} \operatorname{Im} P) = \dim \operatorname{Ker} P + \dim \operatorname{Im} P = d(P) + r(P) = \dim V.$$

Dakle, $\operatorname{Ker} P \dot{+} \operatorname{Im} P = V$.

DZ 3.5. Vrijedi li za proizvoljan operator $A : V \to V$ da je $V = \operatorname{Ker} A \dot{+} \operatorname{Im} A$?

Rješenje Naravno da ne. Npr. $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $Ae_1 = 0$, $Ae_2 = e_1$. Tada je $e_1 \in \operatorname{Ker} A$ i $e_1 \in \operatorname{Im} A$ pa suma potprostora nije direktna. Iz teorema o rangu i defektu slijedi da $\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A \neq V$.

Napomena 3.5. (a) Primjer projektora je $P : V^3 \to V^3$, $P(\vec{a})$ = ortogonalna projekcija od $\vec{a}$ na zadanu ravinu ili pravac. Vrijedi da je P linearan i $P^2 = P$.

(b) Neka je $\dim V = n$, $M \leq V$, $M \neq \{0\}, V$ i neka je $\{a_1, \dots, a_k\}$ baza za M. Nadopunimo je do baze za V, tj. neka je $\{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n\}$ baza za V. Vektori $a_{k+1}, \dots, a_n$ čine bazu za direktni komplement L od V.

Definirajmo preslikavanje $P : V \to V$ kao

$$\begin{aligned} P(a_i) &= a_i, \quad i = 1, \dots, k \\ P(a_i) &= 0, \quad i = k+1, \dots, n \end{aligned}$$

te ga proširimo po linearnosti. Očito je $P^2(a_i) = P(a_i)$, za sve i pa je P projektor. Kažemo da je P **projektor prostora V na potprostor M u smjeru potprostora L**.

(DZ) Dokažite da je $I - P$ projektor na L u smjeru M.

DZ 3.6. Neka je $T \in L(V, W)$, V, W vektorski prostori nad $\mathbb{F}$, $k \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Dokažite da je

$$\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker}(kT), \quad \operatorname{Im} T = \operatorname{Im}(kT).$$

Zadatak 3.8. Neka je $T \in L(\mathbb{R}^3)$ dan formulom

$$T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z).$$

Dokažite da je T regularan i nađite T^{-1}.

Rješenje Prisjetimo se da je T regularan na $\mathbb{R}^3$ (izomorfizam $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) akko je T injekcija akko je $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.
Odredimo $\operatorname{Ker} T$:

$$(x, y, z) \in \operatorname{Ker} T \Leftrightarrow T(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow 2x = 0, 4x - y = 0, 2x + 3y - z = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

Nađimo sad T^{-1}: neka je $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ proizvoljan. Odredimo $T^{-1}(u, v, w) =: (x, y, z)$. Ako na prethodnu jednakost primijenimo T, dobivamo

$$(u, v, w) = TT^{-1}(u, v, w) = T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z).$$

Rješenje ovog nehomogenog sustava s nepoznanicama x, y, z je

$$x = \frac{u}{2}, \quad y = 2u - v, \quad z = 7u - 3v - w.$$

Dakle,

$$T^{-1}(u, v, w) = (\frac{u}{2}, 2u - v, 7u - 3v - w).$$

□

Zadatak 3.9. Neka su $A, B \in L(V)$. Dokažite: $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$,
Rješenje Dovoljno je pokazati da je $\operatorname{Im}(A + B) \subseteq \operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B$, gdje je

$$\operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B = \{y + z : y \in \operatorname{Im} A, z \in \operatorname{Im} B\}.$$

Neka je $w \in \operatorname{Im}(A+B)$. Tada je $w = (A+B)\tilde{x} = A\tilde{x}+B\tilde{x}$, za $\tilde{x} \in V$. Očito je onda $w \in \operatorname{Im} A+\operatorname{Im} B$. Stoga za dimenzije vrijedi

$$\begin{aligned} r(A + B) &= \dim \operatorname{Im}(A + B) \leq \dim (\operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B) = \dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Im} B - \dim (\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Im} B) \\ &\leq \dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Im} B = r(A) + r(B). \end{aligned}$$

□

Zadatak 3.10. Navedite primjer linearnog operatora $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ čiju jezgru čine sve simetrične matrice reda n, a sliku sve antisimetrične matrice reda n.
Rješenje Stavimo $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $T(A) = A - A^T$. Tada je T linearni operator i očito je $\operatorname{Ker} T = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A = A^T\}$. Nadalje, vrijedi $T(A)^T = (A - A^T)^T = A^T - A = -T(A)$. Dakle, $\operatorname{Im} T \subset \{B \in M_n(\mathbb{R}) : B = -B^T\}$. Po teoremu o rangu i defektu je

$$r(T) = n^2 - d(T) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \dim\{B \in M_n(\mathbb{R}) : B = -B^T\}$$

pa je $\operatorname{Im} T = \{B \in M_n(\mathbb{R}) : B = -B^T\}$. □

DZ 3.7. Navedite primjer linearnog operatora $T : M_n(R) \to M_n(R)$ čiju jezgru čine sve antisimetrične matrice reda n, a sliku sve simetrične matrice reda n.

Poglavlje 4

Matrični prikaz (zapis) linearnog operatora

Neka su V, W vektorski prostori nad $\mathbb{F}$, $\dim V = n$, $\dim W = m$. Neka su $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $(f) = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baze za V odnosno W.

(1) Svaki vektor $x \in V$ ima jedinstveni prikaz oblika $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ koji zapisujemo u jednostupčanoj matrici

$$x(e) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ovaj zapis zovemo **matrični prikaz vektora** x **u bazi** (e), i on ovisi o bazi.

Napomena 4.1. Uz oznaku $x(e)$ koristi se još i oznaka $[x]^e$.

Preslikavanje $\varphi : V \to \mathbb{F}^n$, $\varphi(x) = x(e)$ je izomorfizam.

(2) Neka je $A \in L(V, W)$. Operator A je potpuno određen svojim djelovanjem na bazi. Vektori $Ae_1, \ldots, Ae_n$ su u W pa ih možemo prikazati u bazi (f) kao

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Tako dobivene koeficijente pišemo u matricu

$$A(f,e) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \in M_{mn}(\mathbb{F}).$$

Ovaj zapis zovemo **matrični zapis operatora** A **u paru baza** (e)**,** (f). Po stupcima imamo matrične zapise vektora Ae_j, $j = 1, \ldots, n$.

Napomena 4.2. Uz oznaku $A(f,e)$ koristi se još i oznaka $[A]_e^f$.

Preslikavanje $\Psi : L(V, W) \to M_{mn}(\mathbb{F})$, $\Psi(A) = A(f,e)$ je izomorfizam.

Zadatak 4.1. Zadan je jedinični operator $I : V \to V$, $I(v) = v$ i dvije baze $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $(f) = \{f_1, \ldots, f_n\}$ vektorskog prostora V. Dokažite da je $I(f,e) = I$ ako i samo ako je $(f) = (e)$.

RJEŠENJE Primijetimo da je $I(f,e) = I$ ako i samo ako je $I(e_i) = f_i$, $i = 1, \dots, n$, odnosno ako i samo ako je $e_i = f_i$, $i = 1, \dots, n$, odnosno ako i samo ako je $(e) = (f)$ □

ZADATAK 4.2. Odredite matricu operatora $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x+y, x-y, x)$, u kanonskom paru baza.

RJEŠENJE Neka je s $(e) = \{e_1, e_2\}$ označena kanonska baza za $\mathbb{R}^2$, a s $(f) = \{f_1, f_2, f_3\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^3$. Vrijedi da je

$$T(e_1) = (1,1,1) = f_1 + f_2 + f_3, \quad T(e_2) = (1,-1,0) = f_1 - f_2.$$

Stoga je

$$T(f,e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ZADATAK 4.3. Odredite matricu operatora $S : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ zadanog sa

$$S(x,y,z) = \begin{bmatrix} x-y & y-z \\ z-x & x+y+z \end{bmatrix}$$

u kanonskom paru baza.

RJEŠENJE Označimo kanonsku bazu za $\mathbb{R}^3$ s $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$, a za $M_2(\mathbb{R})$ s $(E) = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$. Tada je

$$S(e_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = E_{11} - E_{21} + E_{22}$$
$$S(e_2) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -E_{11} + E_{12} + E_{22}$$
$$S(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -E_{12} + E_{21} + E_{22}$$

pa je

$$S(E,e) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

ZADATAK 4.4. Neka je $A : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^2$ (u $\mathcal{P}_3$ su polinomi stupnja ≤ 3) zadan s $A(p) = (p(0), p(1))$. Dokažite da je A linearni operator, nađite mu matricu u kanonskom paru baza i odredite $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A$, $r(A)$, $d(A)$.

RJEŠENJE Za DZ dokažite da je A linearni operator. Označimo sa $(e) = (1, t, t^2, t^3)$ kanonsku bazu za $\mathcal{P}_3$, a sa $(f) = ((1,0),(0,1))$ kanonsku bazu za $\mathbb{R}^2$. Vrijedi $A(e_1) = (1,1), A(e_2) = (0,1), A(e_3) = (0,1), A(e_4) = (0,1)$ pa je

$$A(f,e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vrijedi $\operatorname{Im} A = [\{A(e_i) : i \in \{1,2,3,4\}\}] = [\{(1,1),(0,1)\}] = \mathbb{R}^2$ pa je $r(A) = 2$. Po teoremu o rangu i defektu $d(A) = 4 - 2 = 2$. Uočimo da je $A(e_2 - e_3) = (0,0), A(e_3 - e_4) = (0,0)$ pa je $\operatorname{Ker} A = [\{e_2 - e_3, e_3 - e_4\}] = [\{t - t^2, t^2 - t^3\}]$.

ZADATAK 4.5. Neka je $A \in M_2$ i $T : M_2 \to M_2$ zadan s $T(X) = AX$. Odredite matrični prikaz tog linearnog operatora u paru kanonskih baza.

RJEŠENJE Neka je
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$
Vrijedi $T(E_{11}) = aE_{11} + cE_{21}$, $T(E_{12}) = aE_{12} + cE_{22}$, $T(E_{21}) = bE_{11} + dE_{21}$, $T(E_{22}) = bE_{12} + dE_{22}$. Označimo $(e) = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ pa je
$$T(e) = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aI & bI \\ cI & dI \end{bmatrix}$$
□

NAPOMENA 4.3. Ako je $A \in M_3$ i $T : M_3 \to M_3$ zadan s $T(X) = AX$, onda je
$$T(e) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & a_{13} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{22} & 0 & 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & 0 & a_{22} & 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{21} & 0 & 0 & a_{22} & 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{32} & 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{31} & 0 & 0 & a_{32} & 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{31} & 0 & 0 & a_{32} & 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}I & a_{12}I & a_{13}I \\ a_{21}I & a_{22}I & a_{23}I \\ a_{31}I & a_{32}I & a_{33}I \end{bmatrix}$$
Kako bi izgledao matrični prikaz linearnog operatora $T : M_n \to M_n$ zadanog s $T(X) = AX$?

DZ 4.1. Neka su $A, B \in M_2$ i $T : M_2 \to M_2$ zadan s $T(X) = AXB$. Odredite matrični prikaz tog linearnog operatora u paru kanonskih baza.

ČINJENICE 4.4. 1. Neka su $(e) = \{e_1, \dots, e_n\}$, $(f) = \{f_1, \dots, f_m\}$ baze za V, W, $x \in V$, $A \in L(V, W)$. Tada je
$$Ax(f) = A(f, e)x(e). \tag{4.1}$$

2. Neka su $(e), (f), (g)$ baze za V, W, X i neka su $A \in L(V, W)$, $B \in L(W, X)$. Tada je $BA \in L(V, X)$ i
$$BA(g, e) = B(g, f)A(f, e). \tag{4.2}$$

4.1 Promjena baze

Sada želimo istražiti što se događa ako mijenjamo baze za prostore V, odnosno W.

ČINJENICE 4.5. Neka je $A \in L(V, W)$, $(e) = \{e_1, \dots, e_n\}$, $(e') = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ dvije baze za V, a $(f) = \{f_1, \dots, f_m\}$, $(f') = \{f'_1, \dots, f'_m\}$ dvije baze za W.

1. Operator A i matrični prikaz operatora $A(f, e)$ u bilo kojem paru baza $(e), (f)$ imaju isti rang, tj.
$$r(A) = r(A(f, e)). \tag{4.3}$$

   Posebno je A regularan operator ako i samo ako je matrica $A(e)$ regularna.

2. Vrijedi
$$A\left(f',e'\right)=I_W\left(f',f\right)A(f,e)I_V\left(e,e'\right)=I_W\left(f,f'\right)^{-1}A(f,e)I_V\left(e,e'\right) \tag{4.4}$$
Matricu $I_V(e,e')$ zovemo **matrica prijelaza iz baze** (e) **u bazu** (e').

Napomena 4.6. Matricu prijelaza $I(e,e')$ možemo zapisati i kao $S(e)$, gdje je $S\in L(V)$ operator zadan na bazi s $Se_i=e'_i$, $i=1,\ldots,n$.

3. Specijalno ako je $V=W$, imamo
$$A\left(e'\right)=I_V\left(e',e\right)A(e)I_V\left(e,e'\right)=I_V\left(e,e'\right)^{-1}A(e)I_V\left(e,e'\right). \tag{4.5}$$

Definicija 4.7. Neka su $A,B\in M_n(\mathbb{F})$. Kažemo da je matrica B **slična** matrici A ako postoji regularna matrica $S\in GL(n,\mathbb{F})$ takva da je $B=S^{-1}AS$.

Dakle, formula (4.5) kaže da su matrični prikazi operatora $A\in L(V)$ u različitim bazama slične matrice.

4. Vrijedi i da je za $x\in V$
$$x\left(e'\right)=I_V\left(e',e\right)x(e)=I_V\left(e,e'\right)^{-1}x(e). \tag{4.6}$$

5. Ako su (e), (e') i (e'') tri baze za V, imamo sljedeću vezu između njih:
$$I_V\left(e',e''\right)=I_V\left(e',e,\right)I_V\left(e,e''\right)=I_V\left(e,e'\right)^{-1}I_V\left(e,e''\right). \tag{4.7}$$

Zadatak 4.6. Odredite matricu prijelaza iz baze $(e)=\{1,t,t^2\}$ u bazu $(e')=\{1-t,1+t^2,t^2\}$ vektorskog prostora $\mathcal{P}_2$ (i obratno).

Rješenje
$$I_{\mathcal{P}_2}(e,e')=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}.$$
Obratno je
$$I_{\mathcal{P}_2}(e',e)=I_{\mathcal{P}_2}(e,e')^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&1&0\\-1&-1&1\end{bmatrix}.$$

Zadatak 4.7. Odredite matricu prijelaza iz baze $(e')=\{(1,2),(2,3)\}$ u bazu $(e'')=\{(1,1),(1,-1)\}$ za $\mathbb{R}^2$ (nijedna nije kanonska).

Rješenje Vrijedi da je
$$\begin{aligned}I_{\mathbb{R}^2}\left(e',e''\right)&=I_{\mathbb{R}^2}\left(e',e\right)I_{\mathbb{R}^2}\left(e,e''\right)=I_{\mathbb{R}^2}\left(e,e'\right)^{-1}I_{\mathbb{R}^2}\left(e,e''\right)\\&=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-5\\1&3\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Zadatak 4.8. U $\mathbb{R}^3$ s (e) označimo kanonsku bazu. Zadana je i baza $(e')=\{e'_1,e'_2,e'_3\}$, gdje su $e'_1=e_1+e_2+e_3$, $e'_2=e_1+e_2$, $e'_3=e_1$. Odredite matricu linearnog operatora $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ zadanog s $Ae_i=e'_i$, $i=1,2,3$, u bazi (e').

RJEŠENJE Imamo

$$A(e) = I_{\mathbb{R}^3}(e, e') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pa je

$$A(e') = I_{\mathbb{R}^3}(e, e')^{-1} A(e) I_{\mathbb{R}^3}(e, e') = A(e)^{-1} A(e) A(e) = A(e).$$

□

ZADATAK 4.9. Neka je (e) kanonska baza za $\mathbb{R}^3$ i $(e') = \{(1,1,2),(2,0,0),(0,1,1)\}$ još jedna baza za $\mathbb{R}^3$. Odredite

(a) $(e_1 + e_3)(e)$,

(b) $(e'_1 - e'_2)(e)$,

(c) $(e_1 - e_2)(e')$,

(d) $(e'_1 - e'_3)(e')$.

RJEŠENJE

(a) $(e_1 + e_3)(e) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $(e'_1 - e'_2)(e) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(c) $(e_1 - e_2)(e') = I(e, e')^{-1}(e_1 - e_2)(e) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

(d) $(e'_1 - e'_3)(e') = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

□

ZADATAK 4.10. Zadana je matrica $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ operatora $A : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ u paru baza $(e') = \{(1,0,1),(1,0,-1),(0,1,1)\}$ i $(f') = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. Odredite $A(x_1, x_2, x_3)$ za proizvoljan $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

RJEŠENJE Neka su (e) i (f) kanonske baze za $\mathbb{R}^3$ i $M_2(\mathbb{R})$. Tada je

$$\begin{aligned}(Ax)(f) &= A(f,e)x(e) = I_{M_2(\mathbb{R})}(f,f')A(f',e')I_{\mathbb{R}^3}(e,e')^{-1}x(e)\\ &= \begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&2\\1&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&2\\1&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac12&-\frac12&\frac12\\\frac12&\frac12&-\frac12\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

pa je

$$Ax = \begin{bmatrix}\frac12x_1+\frac52x_2+\frac12x_3 & x_1+x_2\\ x_1+x_2 & 2x_1+x_2\end{bmatrix}$$

ZADATAK 4.11. Zadan je operator $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ matricom $A(e') = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$ u bazi $(e') = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$ te operator $B:\mathbb{R}^3\to\mathcal{P}_2$ matricom $B(f',e) = \begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$ u paru kanonske baze za $\mathbb{R}^3$ i baze $(f') = \{1, 1-t, 1+t^2\}$ za $\mathcal{P}_2$. Odredite matricu operatora BA u paru kanonskih baza.

RJEŠENJE Neka je (e) kanonska baza za $\mathbb{R}^3$, a (f) kanonska baza za $\mathcal{P}_2$. Tada je

$$\begin{aligned}BA(f,e) &= B(f,e)A(e) = I_{\mathcal{P}_2}(f,f')B(f',e)I_{\mathbb{R}^3}(e,e')A(e')I_{\mathbb{R}^3}(e,e')^{-1}\\ &= \begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}5&4&-3\\-1&-1&0\\2&1&-1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

DZ 4.2. Nađite matricu operatora $A\in L(\mathbb{R}^2)$, $A(x,y) = (x-y, x+y)$ u bazi $\{(1,2),(2,1)\}$.

RJEŠENJE

$$A(e') = -\frac13\begin{bmatrix}-7&-5\\5&1\end{bmatrix}.$$

DZ 4.3. Nađite matricu operatora $A\in L(\mathbb{R}^3,\mathcal{P}_1)$, $A(x,y,z) = x+y+z+xt$ u paru baze $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\}$ i $\{1+t, 1-2t\}$.

RJEŠENJE

$$A(f',e') = \frac13\begin{bmatrix}5&5&2\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

DZ 4.4. Zadana je matrica $A(f,e') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ operatora $A : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ u paru baza $\{(1,-1,0),(1,1,0),(1,0,1)\}$ i $\{1,t,t^2\}$. Odredite Ax.

RJEŠENJE

$$A(x_1,x_2,x_3) = x_1 + \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)t + (x_1 - x_3)t^2.$$

□

DZ 4.5. Neka je $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ linearni operator dan svojom matricom $A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ u kanonskoj bazi. Neka je $(e') = \{e_1', e_2', e_3', e_4'\}$ baza za $\mathbb{R}^4$ zadana s $e_1' = e_1$, $e_2' = e_1+e_2$, $e_3' = e_1+e_2+e_3$, $e_4' = e_1+e_2+e_3+e_4$, a (e'') još jedna baza za $\mathbb{R}^4$ zadana s $e_1'' = e_1$, $e_2'' = e_2$, $e_3'' = e_4$, $e_4'' = e_3$.

(a) Za $x = (1,-1,2,1)$ odredite $(Ax)(e)$, $(Ax)(e')$.

(b) Neka je $y(e') = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$. Odredite $(Ay)(e)$.

(c) Odredite matricu prijelaza iz baze (e) u $(e''$ i $A(e'')$.

(d) Odredite rang operatora A.

RJEŠENJE

(a) $(Ax)(e) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$, $(Ax)(e') = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(b) $(Ay)(e) = \begin{bmatrix} -24 \\ -32 \\ -51 \\ -42 \end{bmatrix}$.

(c) $A(e'') = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(d) $r(A) = 4$

□

ZADATAK 4.12. Neka su V i W konačnodimenzionalni prostori nad istim poljem i $A \in L(V,W)$ operator ranga $r, 0 < r < \dim V$. Dokažite da postoje baze $(b) = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ i $(c) = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ za V i W takve da je

$$A(c,b) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{mn}$$

pri čemu je $I \in M_r$, a nul-blokovi su odgovarajućih formata.

RJEŠENJE Neka je $d = d(A)$. Kako je $r \neq 0$ i $r \neq \dim V$, slijedi da je $d > 0$ i $d < \dim V$. Neka je $\{f_1, \ldots, f_d\}$ baza za $\operatorname{Ker} A$. Nadopunimo ovaj skup vektorima $f_{d+1}, \ldots, f_n$ do baze za prostor V. Kao u dokazu teorema o rangu i defektu se dokaže da je skup $\{Af_{d+1}, \ldots, Af_n\}$ linearno nezavisan u W.
Sjetimo se da je, prema teoremu o rangu i defektu, $n - d = r$.
Sada elemente baze $\{f_{d+1}, \ldots, f_n, f_1, \ldots, f_d\}$ označimo drugačije:

$$b_1 = f_{d+1}, b_2 = f_{d+2}, \ldots, b_r = f_n, b_{r+1} = f_1, \ldots, b_n = f_d.$$

Dakle, imamo

$$(b) = \{b_1, \ldots, b_r, b_{r+1}, \ldots, b_d\}$$

je baza za V.
Označimo $c_1 = Ab_1, \ldots, c_r = Ab_r$. Nadopunimo (linearno nezavisan) skup $\{c_1, \ldots, c_r\}$ do baze

$$(c) = \{c_1, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_m\}$$

za W (uz fiksirani poredak). Tada je $A(c, b)$ traženog oblika.

ZADATAK 4.13. Neka je $A \in L(V, W)$ operator ranga $r > 0$. Dokažite da se A može napisati kao suma r linearnih operatora ranga 1, to jest, da postoje linearni operatori $A_1, \ldots, A_r \in L(V, W)$ ranga 1 takvi da je $A = A_1 + \ldots + A_r$.

RJEŠENJE Neka je $n = \dim V$ i $m = \dim W$.

1. način: Direktno konstruirati $A_1, \ldots, A_r$. Ako je $d = 0$ tada uzmemo bilo koju bazu (b) za V. Ako je $d > 0$ tada za (b) uzmemo bazu konstruiranu u prethodnom zadatku (iz $d > 0$ i $A \neq 0$ za rang $r = r(A)$ slijedi da je $r > 0$ i $r < \dim V$).
Definiramo $A_i \in L(V, W), i = 1, \ldots, r$ djelovanjem na bazi (b) kao

$$A_1(b_1) = Ab_1, A_1(b_j) = 0,\ j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{1\},$$

$$A_2(b_2) = Ab_2, A_2(b_j) = 0,\ j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{2\},$$

odnosno, za svaki $i = 1, \ldots, r$ vrijedi

$$A_i(b_i) = Ab_i, \quad A_i(b_j) = 0, \quad j \neq i.$$

Lako se vidi da je $A = A_1 + \ldots + A_r$, te da su svi $A_1, \ldots, A_r$ operatori ranga 1.

2. način: Zadatak istog tipa smo rješavali za matrice, pa ćemo se ovdje poslužiti tim rezultatom. Dakle, ako je $B \in M_{mn}$ matrica ranga r, tada se B može prikazati kao zbroj r matrica ranga 1. Podsjetimo se dokaza ove tvrdnje.
Iz $r(B) = r$ slijedi da postoje regularne matrice $S \in M_m$ i $T \in M_n$ takve da je $B = SD_rT$, pri čemu je $D_r \in M_{mn}$ kanonska matrica ranga r. Matricu D_r lako rastavimo na zbroj r matrica ranga 1: $D_r = E_{11} + \ldots + E_{rr}$, pri čemu je E_{kk} matrica koja ima 1 na mjestu (k, k) i sve ostalo nule. Tada je $B = SD_rT = SE_{11}T + \ldots + SE_{rr}T$. Označimo $B_k = SE_{kk}T$ za $k = 1, \ldots, r$. Kako su S i T regularne matrice, vrijedi $r(B_k) = r(SE_{kk}T) = 1$ za sve $k = 1, \ldots, r$, a očito je i $B = B_1 + \ldots + B_r$.
Time smo tvrdnju dokazali za matrice.
Vratimo se našem zadatku. Neka su (e) i (f) redom baze za V i W. Tada je $A(f, e)$ matrica ranga r (rang linearnog operatora jednak je rangu njegovog matričnog prikaza). Prema dokazanom, postoje matrice $B_1, \ldots, B_r$ ranga 1 takve da je

$$A(f, e) = B_1 + \ldots + B_r.$$

Kako je preslikavanje $A \mapsto A(f,e)$ izomorfizam s $L(V,W)$ na M_{mn}, gdje su n i m redom dimenzije prostora V i W, postoje $A_1, \ldots, A_r \in L(V,W)$ takvi da je $A_k(f,e) = B_k$ za $k = 1, \ldots, r$. Tada je

$$A(f,e) = A_1(f,e) + \ldots + A_r(f,e) = (A_1 + \ldots + A_r)(f,e),$$

odakle slijedi da $A = A_1 + \ldots + A_r$. Vrijedi $r(A_k) = r(A_k(f,e)) = r(B_k) = 1,\ k \in \{1, \ldots, r\}$. □

ZADATAK 4.14. Neka je $Z_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zrcaljenje s obzirom na pravac s jednadžbom $y = kx, k \neq 0$. Odredite matrični prikaz operatora Z_k u kanonskoj bazi te matrični prikaz u još jednoj, po volji odabranoj bazi.

RJEŠENJE Iz jednog od prijašnjih zadataka znamo da je

$$Z_k(x,y) = \frac{2}{k^2+1}(x + ky, kx + k^2 y) - (x,y).$$

Stoga je

$$Z_k(e) = \begin{bmatrix} \frac{2}{k^2+1} - 1 & \frac{2k}{k^2+1} \\ \frac{2k}{k^2+1} & \frac{2k^2}{k^2+1} - 1 \end{bmatrix}.$$

Linearni operator Z_k će imati "najjednostavniji" matrični prikaz u bazi koju čine neki vektor koji pripada pravcu $y = kx$ i vektor koji leži na pravcu koji je okomit na pravac $y = kx$, npr. $f_1 = (1,k)$, $f_2 = (1, \frac{-1}{k})$. Stavimo $(f) = \{f_1, f_2\}$. Imamo $Z_k(f_1) = f_1$ i $Z_k(f_2) = -f_2$ pa je

$$Z_k(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Uočite da smo iz posljednjeg matričnog prikaza lako mogli doći i do matričnog prikaza $Z_k(e)$. Naime, vrijedi $Z_k(e) = I(e,f)Z_k(f)I(f,e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & \frac{-1}{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & \frac{-1}{k} \end{bmatrix}^{-1}$. □

ZADATAK 4.15. Neka je $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ projektor prostora $\mathbb{R}^3$ na potprostor $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$ duž potprostora $L = \{(x,x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$. Odredite matrični prikaz linearnog operatora P u kanonskoj bazi i nekoj drugoj, po volji odabranoj bazi.

RJEŠENJE Uočimo da je $M = [\{(1,0,1),(0,1,1)\}]$, $L = [\{(1,1,-1)\}]$. Skup

$$\{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,-1)\}$$

je baza za $\mathbb{R}^3$ i vrijedi

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{2}{3}(1,0,1) - \frac{1}{3}(0,1,1) + \frac{1}{3}(1,1,-1) \\ e_2 &= -\frac{1}{3}(1,0,1) + \frac{2}{3}(0,1,1) + \frac{1}{3}(1,1,-1) \\ e_3 &= \frac{1}{3}(1,0,1) + \frac{1}{3}(0,1,1) - \frac{1}{3}(1,1,-1) \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} Pe_1 &= \frac{2}{3}(1,0,1) - \frac{1}{3}(0,1,1) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ Pe_2 &= -\frac{1}{3}(1,0,1) + \frac{2}{3}(0,1,1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ Pe_3 &= \frac{1}{3}(1,0,1) + \frac{1}{3}(0,1,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

pa je

$$P(e) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Operator P ima najjednostavniji prikaz u bazi $(f) = \{f_1, f_2, f_3\}$, gdje je

$$f_1 = (1, 0, 1) \ f_2 = (0, 1, 1) \ f_3 = (1, 1, -1).$$

Vrijedi $P(f_1) = f_1, P(f_2) = f_2, P(f_3) = 0$ pa je

$$P(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da smo $P(e)$ mogli dobiti i koristeći formulu

$$P(e) = I(e, f)P(f)I(f, e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Poglavlje 5

Spektar

Činjenice 5.1.

1. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$, $A \in L(V)$. Za skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ kažemo da je **svojstvena vrijednost** operatora A ako postoji vektor $x \in V$, $x \neq 0$, takav da je $Ax = \lambda x$. Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A naziva se **spektar** od A, oznaka je $\sigma(A)$. Vektor x se naziva **svojstveni vektor** pridružen svojstvenoj vrijednosti λ.

2. Svojstveni vektor nije jedinstven. Ako za svojstvenu vrijednost λ definiramo skup

$$V_A(\lambda) = \{x \in V : Ax = \lambda x\},$$

tada je $V_A(\lambda)$ potprostor od V. Zovemo ga **svojstveni potprostor**. (Vrijedi da je $V_A(\lambda) = \text{Ker}(A - \lambda I)$)

3. Vrijedi da je A regularan ako i samo ako $0 \notin \sigma(A)$.

4. Broj $g(\lambda) := \dim V_A(\lambda)$ zovemo **geometrijska kratnost** svojstvene vrijednosti λ. Vrijedi da je $g(\lambda) \geq 1$, $\forall \lambda \in \sigma(A)$.

5. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Polinom $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ naziva se svojstveni (karakteristični) polinom matrice A.

   Neka je $A \in L(V)$, pri čemu je V konačnodimenzionalni vektorski prostor. Svojstveni (karakteristični) polinom operatora A je polinom $k_A(\lambda) = k_{A(e)}(\lambda)$, gdje je matrični prikaz operatora A u bazi (e).

   Prethodna definicija je korektna jer su za svake dvije baze (e) i $(e^{'})$ vektorskog prostora V matrice $A(e)$ i $A(e')$ slične, a slične matrice imaju iste karakteristične polinome.

   Uvedimo još i pojmove determinante i traga linearnog operatora.

6. Neka je V K.D.V.P i $A \in L(V)$. Trag linearnog operatora A je definiran sa $\text{tr}(A) = \text{tr}\, A(e)$, a determinanta linearnog operatora A sa $\det(A(e))$, pri čemu je (e) proizvoljna baza vektorskog prostora V.

7. Gornja definicija je dobra jer slične matrice imaju isti trag i determinantu, dakle za svake dvije baze (e) i (e') od V vrijedi

$$\text{tr}\, A(e) = \text{tr}\, A(e'), \quad \det A(e) = \det A(e').$$

8.

Teorem 5.2. *Neka je V KDVP nad $\mathbb{F}$. Skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ je svojstvena vrijednost od A ako i samo ako je $k_A(\lambda_0) = 0$.*

9. Ako je $\dim V = n$, onda A ima najviše n svojstvenih vrijednosti.

10. Jako se razlikuju slučajevi $V_\mathbb{R}$ i $V_\mathbb{C}$! Npr. u $\mathbb{R}^2$ operator rotacije nema (realnih) svojstvenih vrijednosti. Ako je $\dim V_\mathbb{R} = 3$, onda uvijek postoji barem jedna svojstvena vrijednost.

11.

Teorem 5.3. *Neka je $A \in L(V)$, $\dim V < \infty$, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ te neka je $\left(e^{(i)}\right)$ baza za svojstveni potprostor $V_A(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, k$. Tada je unija svih skupova $\left(e^{(i)}\right)$, $i = 1, \dots, k$, linearno nezavisan skup.*

12. Posebno: različitim svojstvenim vrijednostima pripadaju linearno nezavisni svojstveni vektori.

Napomena 5.4. Svojstveni polinom matrice $A \in M_n(\mathbb{F})$ je oblika

$$k_A(\lambda) = k_n\lambda^n + k_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + k_1\lambda + k_0, k_i \in \mathbb{F}.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} k_n &= (-1)^n, \\ k_{n-1} &= (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A, \\ k_0 &= \det A. \end{aligned}$$

Zadatak 5.1. Neka je $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearni operator dan svojom matricom u paru kanonskih baza

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Odredite svojstvene vrijednosti od A i pripadne svojstvene potprostore.

Rješenje Tražimo nultočke karakterističnog polinoma $k_A(\lambda) = -\lambda^3$ pa je $\sigma(A) = \{0\}$.
Odredit ćemo $V_A(0)$ tako da riješimo sustav $Ax = 0$. Rješenje je

$$x = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Dakle, $V_A(0) = \left[\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}\right]$. Imamo $g(0) = 2$.

U prethodnom zadatku smo i bez računa znali da je $0 \in \sigma(A)$ jer je A singularna.

Zadatak 5.2. Neka su zadani vektori $v_1 = (1, 1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1, 1), v_3 = (1, 2, 2, 1) \in \mathbb{R}^4$. Postoji li linearni operator $A \in L(\mathbb{R}^4)$ sa sljedećim svojstvom:

(a) v_1 i v_2 su svojstveni vektori od A pridruženi redom svojstvenim vrijednostima 1 i 2?

(b) v_1, v_2 i v_3 su svojstveni vektori od A pridruženi redom svojstvenim vrijednostima 1, 2 i 3?

(c) v_1, v_2 i v_3 su svojstveni vektori od A?

RJEŠENJE

(a) Da. Na primjer, neka su $u_1 = (1,0,0,0)$ i $u_2 = (0,1,0,0)$. Tada je $\{v_1, v_2, u_1, u_2\}$ baza za $\mathbb{R}^4$. Definiramo A djelovanjem na ovoj bazi kao:

$$Av_1 = v_1, Av_2 = 2v_2, Au_1 = Au_2 = 0,$$

te proširimo po linearnosti.

(b) Ne, svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima moraju činiti linearno nezavisan skup, a skup $\{v_1, v_2, v_3\}$ je linearno zavisan.

(c) Pretpostavimo da su $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ takvi da je $Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2., Av_3 = \lambda_3 v_3$. Iz $v_3 = v_1 + v_2$ slijedi $Av_3 = Av_1 + Av_2$, dakle $\lambda_3 v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, odakle slijedi $\lambda_3(v_1 + v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$. Odavde slijedi $(\lambda_1 - \lambda_3)v_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)v_2 = 0$. Kako su v_1 i v_2 linearno nezavisni, slijedi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Prema tome, ako su v_1, v_2, v_3 svojstveni vektori od A, tada su oni nužno pridruženi istoj svojstvenoj vrijednosti. Neka je to λ.

Takav linearni operator postoji, na primjer, neka je $\{v_1, v_2, u_1, u_2\}$ baza kao u (a). Definiramo A djelovanjem na ovoj bazi kao:

$$Av_1 = \lambda v_1, Av_2 = \lambda v_2, Au_1 = Au_2 = 0,$$

te proširimo po linearnosti.

□

ZADATAK 5.3. Neka je V KDVP i $A \in L(V)$. Neka su v_1 i v_2 svojstveni vektori od A pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima. Dokažite da niti jedan vektor oblika $\alpha v_1 + \beta v_2$, gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, ne može biti svojstveni vektor od A.

RJEŠENJE Neka je $Av_1 = \lambda_1 v_1$ i $Av_2 = \lambda_2 v_2$, pri čemu je $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Pretpostavimo suprotno, to jest da je $A(\alpha v_1 + \beta v_2) = \lambda(\alpha v_1 + \beta v_2)$ za neki $\lambda \in \mathbb{F}$. Tada imamo

$$\alpha\lambda_1 v_1 + \beta\lambda_2 v_2 = \lambda\alpha v_1 + \lambda\beta v_2 \Rightarrow \alpha(\lambda - \lambda_1)v_1 + \beta(\lambda - \lambda_2)v_2 = 0.$$

Kako su v_1 i v_2 svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima, oni su linearno nezavisni. Zato slijedi $\alpha(\lambda - \lambda_1) = 0$ i $\beta(\lambda - \lambda_2) = 0$. Zbog $\alpha \neq 0$ i $\beta \neq 0$ slijedi $\lambda_1 = \lambda = \lambda_2$, što je kontradikcija s pretpostavkom. □

DEFINICIJA 5.5. Kratnost svojstvene vrijednosti λ kao nultočke karakterističnog polinoma naziva se **algebarska kratnost** svojstvene vrijednosti i označava s $a(\lambda)$.

Teorem 5.6. *Geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti je uvijek manja ili jednaka od njene algebarske kratnosti, tj.*

$$g(\lambda) \leq a(\lambda), \quad \forall \lambda \in \sigma(A).$$

ZADATAK 5.4. Linearni operator $A \in L(V)$ zadan je svojom matricom

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore ovog operatora, te algebarske i geometrijske kratnosti svojstvenih vrijednosti.

Rješenje

$$k_A(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda-1)^2$$

pa je $\sigma(A) = \{1, 2\}$, algebarske kratnosti su $a(1) = 2$, $a(2) = 1$. Odredimo svojstvene potprostore:

$\boxed{V_A(1)}$ Rješavamo $(A - I)x = 0$ i dobivamo $x_1 = x_3$, $x_2 = x_3$ pa je $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ baza za $V_A(1)$. Dakle, $g(1) = 1$.

$\boxed{V_A(2)}$ Rješavamo $(A - 2I)x = 0$ i dobivamo $x_1 = 0$, $x_2 = x_3$ pa je $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ baza za $V_A(2)$. Dakle, $g(2) = 1$.

DZ 5.1. Odredite algebarske i geometrijske kratnosti svojstvene vrijednosti $\lambda = 0$ u zadatku 5.1. Odredite algebarske i geometrijske kratnosti svojstvenih vrijednosti za

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Rješenje

(a) $\sigma(A) = \{1, 4\}$, $a(1) = g(1) = 1$, $a(4) = 2$, $g(4) = 1$,

(b) $\sigma(B) = \{4\}$, $a(4) = g(4) = 3$,

(c) $\sigma(C) = \{4\}$, $a(4) = 3$, $g(4) = 2$,

(d) $\sigma(D) = \{4\}$, $a(4) = 3$, $g(4) = 1$.

DZ 5.2. Odredite algebarske i geometrijske kratnosti svojstvenih vrijednosti za

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rješenje

(a) $\sigma(A) = \{0, -2, -3\}$

(b) $\sigma(B) = \{3, 6\}$, $a(3) = g(3) = 2$.

(c) $\sigma(C) = \{-3, -1, 1, 3\}$.

Zadatak 5.5. Odredite svojstvene vrijednosti, njihove algebarske i geometrijske kratnosti te pripadne svojstvene vektore linearnog operatora $A \in L(\mathbb{F}^n)$ zadanog matricom u kanonskoj bazi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Rješenje

- 1. način: Uočimo da je $r(A) = 1$ pa je, po teoremu o rangu i defektu, $d(A) = n-1$, odnosno $\dim \operatorname{Ker} A = n-1$. Stoga je jedna svojstvena vrijednost 0 i njena geometrijska kratnost je $n-1$. Vrijedi $a(0) \geq g(0) = n-1$. Nadalje, uočimo da je

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} = n \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

pa je i n svojstvena vrijednost linearnog operatora A. Iz toga zaključujemo da je $a(n) \geq g(n) \geq 1$. Kako je $n-1+1 \leq a(0)+a(n) \leq n$, zaključujemo da je $a(0) = g(0) = n-1$ i $a(n) = g(n) = 1$ i $\sigma(A) = \{0, n\}$. Nadalje, $V_A(n) = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

Treba još odrediti $V_A(0)$. Rješavamo sustav $Ax = 0$ i dobivamo $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. Dakle, $x \in V_A(0)$ ako i samo ako

$$x = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Uz oznake $f_i = e_i - e_1, i = 2, \cdots, n$, gdje su $e_1, \cdots, e_n$ vektori kanonske baze za $\mathbb{F}^n$, vrijedi $V_A(0) = [\{f_2, \cdots, f_n\}]$.

- 2. način (ovo nije potrebno raditi na vježbama, ali neka ostane u skripti): Najprije računamo karakteristični polinom od A:

$$k_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-\lambda \end{vmatrix} = \text{prvi redak pomnožimo s } -1 \text{ i dodamo svim ostalim retci}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \text{prvom stupcu dodamo ostale stupce}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda+(n-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix} = (n-\lambda)(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}.$$

Stoga je $\sigma(A) = \{0, n\}$ i $a(0) = n-1, a(n) = 1$. Odredimo svojstvene potprostore:

$\boxed{V_A(0)}$ Rješavamo sustav $Ax = 0$ i dobivamo $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. Dakle, $x \in V_A(0)$ ako i samo ako

$$x = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Uz oznake $f_i = e_i - e_1, i = 2, \cdots, n$, gdje su $e_1, \cdots, e_n$ vektori kanonske baze za $\mathbb{F}^n$, vrijedi $V_A(0) = [\{f_2, \cdots, f_n\}]$. Dakle, $g(0) = \dim V_A(0) = n - 1$.

$\boxed{V_A(n)}$ Rješavamo sustav $(A - nI)x = 0$.

$$\begin{bmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{bmatrix} \sim \text{prvi redak pomnožimo s } -1 \text{ i dodamo svim ostalim retcim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n & -n & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & -n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & -n \end{bmatrix} \sim \text{sve retke, osim prvog, podijelimo s n}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \sim \text{prvom retku dodamo sumu preostalih redaka}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

Dakle, $x \in V_A(n) \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, tj. $V_A(n) = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$. Stoga je $g(n) = \dim V_A(n) = 1$.

Napomena 5.7. Uočimo da je u prethodnom primjeru $g(0) = a(0)$ i $g(n) = a(n)$, tj. algebarska i geometrijska kratnost se za svaku svojstvenu vrijednost podudaraju. Stoga se operator A može dijagonalizirati. Uz oznaku $f = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ vidimo da je matrični prikaz operatora A u bazi

$\{f_2, \cdots, f_n, f\}$ dijagonalna matrica

$$A(f_2, \cdots, f_n, f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}.$$

ZADATAK 5.6. Neka je $A \in L(V), \alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ proizvoljan skalar. Dokažite

$$\sigma(\alpha A) = \alpha\sigma(A). \tag{5.1}$$

RJEŠENJE

$\boxed{\subseteq}$ Neka je $\lambda \in \sigma(\alpha A)$. To znači da postoji vektor $x \in V, x \neq 0$ takav da je $(\alpha A)x = \lambda x$. No, tada je $Ax = \frac{\lambda}{\alpha}x$, odnosno, $\frac{\lambda}{\alpha} \in \sigma(A)$. Stoga je $\lambda \in \alpha\sigma(A)$.

$\boxed{\supseteq}$ Neka je $\lambda \in \sigma(A)$. Tada postoji vektor $x \in V, x \neq 0$ takav da je $Ax = \lambda x$. Sada je $(\alpha A)x = (\alpha\lambda)x$. Dakle, $\alpha\lambda \in \sigma(\alpha A)$.

$\square$

ZADATAK 5.7. Neka je $A \in L(V), \alpha \in \mathbb{F}$ proizvoljan skalar. Dokažite

$$\sigma(A - \alpha I) = \{\lambda - \alpha : \lambda \in \sigma(A)\} = \sigma(A) - \alpha. \tag{5.2}$$

RJEŠENJE

$\boxed{\subseteq}$ Neka je $\lambda \in \sigma(A - \alpha I)$. Tada $\exists x \in V,\ x \neq 0$, takav da je $(A - \alpha I)x = \lambda x$, tj. $Ax = (\lambda + \alpha)x$. Slijedi da je $\lambda + \alpha \in \sigma(A)$, tj. $\lambda + \alpha = \lambda_0$, za neki $\lambda_0 \in \sigma(A)$ pa je $\lambda = \lambda_0 - \alpha$, gdje je $\lambda_0 \in \sigma(A)$.

$\boxed{\supseteq}$ Neka je $\mu = \lambda - \alpha$, za neki $\lambda \in \sigma(A)$. Tada je $\lambda = \mu + \alpha$ i $\exists x \in V,\ x \neq 0$, takav da je $Ax = \lambda x = (\mu + \alpha)x$, tj. $(A - \alpha I)x = \mu x$. Stoga je $\mu \in \sigma(A - \alpha I)$.

$\square$

ZADATAK 5.8. Neka je $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ proizvoljan skalar.

a) Dokažite
$$\sigma(\lambda_0 I) = \{\lambda_0\}. \tag{5.3}$$

b) Ako je $A \in L(V)$ t.d. $\sigma(A) = \{\lambda_0\}$, mora li vrijediti da je $A = \lambda_0 I$?

RJEŠENJE

a) Pogledajmo karakteristični polinom:

$$k_{\lambda_0 I}(\lambda) = \det\left((\lambda_0 - \lambda)I\right) = (\lambda_0 - \lambda)^n$$

pa je $\sigma(\lambda_0 I) = \{\lambda_0\}$.

b) Ne mora vrijediti $A = \lambda_0 I$. Uzmimo npr. linearni operator $A : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ čiji je matrični prikaz u paru kanonskih baza dan s
$$\begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}.$$
Tada je $\sigma(A) = \{\lambda_0\}$, a očito $A \neq \lambda_0 I$.

□

ZADATAK 5.9. Neka je $A \in L(V)$ regularan operator. Dokažite

$$\sigma\left(A^{-1}\right) = \left\{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A)\right\} = \sigma(A)^{-1}. \tag{5.4}$$

RJEŠENJE

$\boxed{\subseteq}$ Neka je $\mu \in \sigma(A^{-1})$. Tada postoji $y \in V$, $y \neq 0$, takav da je $A^{-1}y = \mu y$. Slijedi da je $y = \mu A y$, tj. $Ay = \frac{1}{\mu}y$. Kako je $y \neq 0$, to je $\mu^{-1} \in \sigma(A)$ pa je $\mu^{-1} = \lambda$, za neki $\lambda \in \sigma(A)$ pa je $\mu = \lambda^{-1} \in \sigma(A)^{-1}$.

$\boxed{\supseteq}$ Neka je $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Tada je $Ax = \lambda_0 x$, za $x \neq 0$. Slijedi da je $A^{-1}(Ax) = \lambda_0 A^{-1}x$, tj. $A^{-1}x = \frac{1}{\lambda_0}x$. Prema tome je $\frac{1}{\lambda_0} \in \sigma(A^{-1})$.

Primijetimo da smo ovu inkluziju mogli dobiti iz prethodne tako da umjesto operatora A gledamo A^{-1}.

NAPOMENA 5.8. Primijetimo da se u prethodnim zadacima svojstveni vektor nije mijenjao kod prelaska na drugi operator.

ZADATAK 5.10. Ako je $\lambda \in \sigma(A)$, onda je $\lambda^k \in \sigma\left(A^k\right)$, $k \in \mathbb{N}$.

RJEŠENJE Neka je $\lambda \in \sigma(A)$. Tada postoji $x \neq 0$ takav da je $Ax = \lambda x$. Slijedi da je $A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda^2 x$. Indukcijom se lako pokaže traženi rezultat za opći $k \in \mathbb{N}$.

NAPOMENA 5.9. Vrijedi li obrat? Ne, na primjer: rotacija u $\mathbb{R}^2$ za $90°$.

ZADATAK 5.11. Neka su $A, B \in L(V)$, $\dim V < \infty$. Dokažite:

$$\sigma(AB) = \sigma(BA). \tag{5.5}$$

RJEŠENJE 1. način: Dokažimo da je $\sigma(AB) \subset \sigma(BA)$. Neka je $\lambda \in \sigma(AB)$. Tada postoji $x \in V \setminus \{0\}$ takav da je $ABx = \lambda x$. Sada je $BABx = \lambda Bx$. Ukoliko je $Bx \neq 0$, zaključujemo da je $\lambda \in \sigma(BA)$. Ako je $Bx = 0$, onda zbog $ABx = \lambda x$ slijedi $\lambda = 0$, no u tom slučaju je AB singularan operator, a onda je $\det(AB) = 0$. Tada je i $\det(BA) = \det B \det A = \det A \det B = \det(AB) = 0$ pa je i BA singularan operator pa je $0 \in \sigma(BA)$. U svakom slučaju, $\sigma(AB) \subset \sigma(BA)$. Analogno se dokazuje i da je $\sigma(BA) \subset \sigma(AB)$.

2. način: Dokažimo da su karakteristični polinomi od AB i BA jednaki pa iz toga odmah slijedi rezultat. Razlikujemo dva slučaja:

1.) Barem jedan od operatora A, B je regularan. BSO neka je to A.

Označimo s $A(e)$ i $B(e)$ matrične prikaze od A, B u nekoj bazi (e). Vrijedi

$$BA(e) = B(e)A(e) = \left(A^{-1}(e)A(e)\right)B(e)A(e) = A^{-1}(e)\left(A(e)B(e)\right)A(e) = A^{-1}(e)\left(AB(e)\right)A(e),$$

tj. matrice $AB(e)$ i $BA(e)$ su slične pa imaju jednake karakteristične polinome, a to su upravo karakteristični polinomi operatora AB i BA.

2.) Oba operatora A, B su singularna.

Neka je $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \sigma(A)$. Tada je operator $A - \alpha I$ regularan pa ako gledamo operatore $A - \alpha I$ i B, nalazimo se u uvjetima prvog slučaja. Dakle,

$$k_{(A-\alpha I)B}(\lambda) = k_{B(A-\alpha I)}(\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}.$$

Fiksirajmo sada $\lambda \in \mathbb{F}$ i promatrajmo $p_1^\lambda(x) = k_{(A-xI)B}(\lambda)$ i $p_2^\lambda(x) = k_{B(A-xI)}(\lambda)$ kao polinome stupnja n u varijabli x. Kako se oni podudaraju u više od n točaka, oni su jednaki u svim točkama, tj. vrijedi

$$k_{(A-xI)B}(\lambda) = k_{B(A-xI)}(\lambda), \quad \forall x \in \mathbb{F}, \quad \lambda \text{ fiksan}.$$

Specijalno za $x = 0$ imamo

$$k_{AB}(\lambda) = k_{BA}(\lambda).$$

Postupak primijenimo na svaki $\lambda \in \mathbb{F}$ pa je $k_{AB} = k_{BA}$.

□

Napomena 5.10. Svojstvene vrijednosti možemo definirati i za kvadratne matrice. Naime, matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ možemo shvatiti kao linearni operator $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$,

$$A(x) = A(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \right).$$

Matrica tog operatora u paru kanonskih baza je upravo A.

Zadatak 5.12. Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ proizvoljna matrica. Dokažite da je $\det A$ jednaka produktu, a $\operatorname{tr} A$ sumi svojstvenih vrijednosti od A (uključujući njihove kratnosti).

Rješenje Kako je $A \in M_n(\mathbb{C})$, njen karakteristični polinom se može faktorizirati kao

$$k_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda),$$

gdje je $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Tada je

$$\det A = k_A(0) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

Znamo da je $(-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$ koeficijent uz λ^{n-1} u karakterističnom polinomu pa je

$$(-1)^{n-1} \operatorname{tr} A = (-1)^{n-1} (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n),$$

tj.

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n.$$

□

Zadatak 5.13. Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrična matrica. Dokažite da su sve njene svojstvene vrijednosti realne, tj. $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Rješenje Matricu $A \in M_n(\mathbb{R})$ možemo shvatiti kao kompleksnu matricu koja ima n kompleksnih svojstvenih vrijednosti kojima pripadaju kompleksni svojstveni vektori.

Neka je $\lambda \in \sigma(A)$. Tada postoji vektor $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in M_{n1}(\mathbb{C})$, $z \neq 0$, takav da je $Az = \lambda z$. Za $z \in M_{n1}(\mathbb{C})$ je $z^* = \overline{z}^T = \begin{pmatrix} \overline{z_1} & \ldots & \overline{z_n} \end{pmatrix} \in M_{1n}(\mathbb{C})$. Stoga je $z^*z \in M_{11}(\mathbb{C})$:

$$z^*z = \begin{pmatrix} \overline{z_1} & \ldots & \overline{z_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \overline{z_i} z_i = \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Nadalje, $(Az)^* = (\lambda z)^* = \overline{\lambda} z^*$. S druge strane, kako je A simetrična realna matrica, vrijedi $A^* = A$ pa je $(Az)^* = z^* A^* = z^* A$. Dakle, $\overline{\lambda} z^* = z^* A$. Prema tome je

$$z^* A z = \overline{\lambda} z^* z$$

S druge strane je

$$z^* A z = z^* \lambda z = \lambda z^* z$$

pa je $\lambda = \overline{\lambda}$, tj. $\lambda \in \mathbb{R}$.

DZ 5.3. Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ takva da je $-2 \in \sigma(A^2 + 2A)$. Dokažite da je tada $-4 \in \sigma(A^4)$. Vrijedi li obrat?

Rješenje Ako je $-2 \in \sigma(A^2 + 2A)$, onda je $\det(A^2 + 2A + 2I) = 0$. Kako je $A^4 + 4I = (A^2 + 2A + 2I)(A^2 - 2A + 2I)$, onda je

$$\det(A^4 + 4I) = \det(A^2 + 2A + 2I) \det(A^2 - 2A + 2I) = 0.$$

Obrat ne vrijedi: Neka je $A = (1 + i) \in M_1(\mathbb{C})$. Za nju je $A^2 = 2i$, $A^4 + 4I = (2i)^2 + 4 = 0$ pa je $\det(A^4 + 4I) = 0$, tj. $-4 \in \sigma(A^4)$. No, $\det(A^2 + 2A + 2) = 2i + 2(i + 1) + 2 = 4i + 4 \neq 0$, tj. $-2 \notin \sigma(A^2 + 2A)$.

Zadatak 5.14. Neka je $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$ takva da je $\det A < 0$. Dokažite da A ima barem dvije realne svojstvene vrijednosti.

Rješenje Shvatimo A kao matricu iz $M_{2n}(\mathbb{C})$ te faktoriziramo njen karakteristični polinom:

$$k_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_{2n} - \lambda), \quad \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

Kako k_A ima realne koeficijente, jer je A realna matrica, sve kompleksne svojstvene vrijednosti dolaze u konjugiranim parovima, tj. za $\lambda_0 \in \sigma(A)$ je i $\overline{\lambda_0} \in \sigma(A)$. Još vrijedi

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{2n}.$$

Razlikujemo slučajeve:

1. A nema realnih svojstvenih vrijednosti.

   To znači da imamo n parova kompleksno konjugiranih svojstvenih vriednosti pa je

   $$\det A = \lambda_1 \overline{\lambda_1} \lambda_2 \overline{\lambda_2} \cdots \lambda_n \overline{\lambda_n} = |\lambda_1|^2 |\lambda_2|^2 \cdots |\lambda_n|^2 \geq 0$$

   što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $\det A < 0$.

2. A ima točno jednu realnu svojstvenu vrijednost.

   Ovo je nemoguće jer bi ostalih $2n - 1$ svojstvenih vrijednosti trebale doći u kompleksno konjugiranim parovima, a ima ih neparan broj.

Dakle, A ima barem dvije realne svojstvene vrijednost.

DZ 5.4. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Dokažite da je $\sigma(A^T) = \sigma(A)$.

Rješenje Gledamo karakterističan polinom

$$k_{A^T}(\lambda) = \det\left(A^T - \lambda I\right) = \det\left(A - \lambda I\right)^T = \det\left(A - \lambda I\right) = k_A(\lambda).$$

Činjenice 5.11.

1.

Teorem 5.12. *Neka je V kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor, $A \in L(V)$, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Operator A se može dijagonalizirati (tj. postoji baza od V u kojoj je matrični prokaz za A dijagonalna matrica) ako i samo ako su za svaku svojstvenu vrijednost od A njene algebarske i geometrijske kratnosti jednake.*

2. Jednostavna posljedica: ako $A \in L(V)$, $\dim V = n$, ima n različitih svojstvenih vrijednosti, tada se on može dijagonalizirati.

3. Vrijedi napomenuti da se ne mogu svi operatori dijagonalizirati (čak ni na kompleksnim prostorima). Najopćenitiji oblik je tzv. Jordanova forma (na $V_{\mathbb{C}}$):

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_r \end{pmatrix}, \quad J_k = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_l \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Ovdje je J blok-dijagonalna matrica, svaki blok J_k zove se *Jordanova klijetka*, pripada različitoj svojstvenoj vrijednosti od A, i sam je blok-dijagonalna matrica koja se sastoji od osnovnih Jordanovih blokova ili *elementarnih Jordanovih klijetki* B_i. O Jordanovoj formi će biti puno riječi na kolegiju Vektorski prostori.

Primjer 5.13. Matrica

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ima spektar $\sigma(A) = \{1, 2, 4\}$ i $a(1) = a(2) = 1$, $a(4) = 2 \neq 1 = g(4)$ pa A nije dijagonalizabilna. No, postoji invertibilna matrica P takva da je $P^{-1}AP = J$, gdje je

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Zadatak 5.15. Može li se dijagonalizirati operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ zadan svojom matricom u kanonskoj bazi

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}?$$

Rješenje Odredimo najprije karakteristični polinom od A:

$$k_A(\lambda) = -(\lambda - 2)^3.$$

Dakle, $\sigma(A) = \{2\}$, $a(2) = 3$. Odredimo geometrijsku kratnost svojstvene vrijednosti 2.

$$V_A(2) = \ldots = \left[\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right]$$

pa je $g(2) = 2 \neq 3 = a(2)$ pa se A ne može dijagonalizirati. $\square$

Prisjetimo se operatora A iz zadatka 5.5. Tamo smo imali $a(n) = g(n) = 1$ i $a(0) = g(0) = n - 1$ pa se taj operator mogao dijagonalizirati. U bazi koja je sastavljena od svojstvenih vektora, njegova matrica ima prikaz

$$A(e') = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, n).$$

Zadatak 5.16. Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje se linearni operator $A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ čiji je matrični prikaz u kanonskoj bazi zadan s

$$A(e) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & -2 \\ 6 & 6 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

može dijagonalizirati.

Rješenje Vrijedi $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2(\lambda - x)$. Razlikujemo tri slučaja:

- $x \notin \{1, -2\}$

  U tom slučaju je $\sigma(A) = \{1, -2, x\}$, $a(1) = 1, a(-2) = 2, a(x) = 1$. Kako je geometrijska kratnost manja ili jednaka algebarskoj, vrijedi $g(1) = a(1) = 1, g(x) = a(x) = 1$. Trebamo još odrediti $g(-2)$. Vrijedi $g(-2) = d(A + 2I) = 4 - r(A + 2I) = 2 = a(-2)$. Dakle, u ovom slučaju se operator može dijagonalizirati.

- $x = -2$

  U tom slučaju je $\sigma(A) = \{1, -2\}$, $a(1) = 1, a(-2) = 3$. Kako je geometrijska kratnost manja ili jednaka algebarskoj, vrijedi $g(1) = a(1) = 1$. Trebamo još odrediti $g(-2)$. Vrijedi $g(-2) = d(A + 2I) = 4 - r(A + 2I) = 2 < a(-2)$. Dakle, u ovom slučaju se operator ne može dijagonalizirati.

- $x = 1$

  U tom slučaju je $\sigma(A) = \{1, -2\}$, $a(1) = 2, a(-2) = 2$. Vrijedi $g(-2) = d(A + 2I) = 4 - r(A + 2I) = 2 = a(-2)$, $g(1) = d(A - I) = 4 - r(A - I) = 2 = a(1)$. Dakle, u ovom slučaju se operator može dijagonalizirati.

Operator se može dijagonalizirati ako i samo ako je $x \neq -2$.

Zadatak 5.17. Neka je $A \in L(\mathbb{R}^n)$ i neka su $1, 2, \ldots, k$ svojstvene vrijednosti operatora A s geometrijskim kratnostima $1, 2, \ldots, k$, redom, i neka je $n = 1 + 2 + \ldots + k$. Ispitajte je li A regularan te, ako je, odredite $\sigma(A^{-1})$, $\mathrm{tr}(A^{-1})$.

Rješenje Suma geometrijskih kratnosti svojstvenih vrijednosti $1, 2, \ldots, k$ je jednaka $n = \dim \mathbb{R}^n$. Suma algebarskih kratnosti je uvijek manja ili jednaka n, a veća ili jednaka sumi geometrijskih kratnosti, sto je u ovom slucaju n. Slijedi da je svaka geometrijska kratnost jednaka pripadnoj algebarskoj kratnosti i $\sigma(A) = \{1, 2, \ldots, k\}$. Kako $0 \notin \sigma(A)$, to je A regularan. Nadalje, imamo

$$\sigma(A^{-1}) = \left\{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A)\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{k}\right\}.$$

Dakle,

$$A \sim \operatorname{diag}(1,2,2,3,3,3,\dots,k,\dots,k), \quad A^{-1} \sim \operatorname{diag}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{k},\dots,\frac{1}{k}\right).$$

Stoga je $\operatorname{tr}(A^{-1}) = k$. □

Definicija 5.14. Neka je $A \in L(V)$, $M \leq V$. Kažemo da je M **invarijantan potprostor** za A ako je $A(M) \subseteq M$, tj. $Ax \in M$, $\forall x \in M$.

Činjenice 5.15.

1. Svaki operator ima invarijantne potprostore $\{0\}$ i V. Singularan operator A ima i prave invarijantne potprostore $\operatorname{Im} A \neq V$, $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$.
2. Ako je $M = [\{e_1,\dots,e_k\}] \leq V$ pravi invarijantni potprostor za A, $\{e_1,\dots,e_k,e_{k+1},\dots,e_n\}$ baza za V, tada je matrični prikaz od A u toj bazi
$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$$
blok-gornjetrokutasta matrica, gdje je $A_1 \in M_k(\mathbb{F})$.
3. Primijetimo da ako je uz oznake kao u prethodnoj točki,
$$k_A(\lambda) = k_{A_1}(\lambda) k_{A_3}(\lambda).$$
4. Svaki svojstveni potprostor je invarijantan za A. Obrat ne vrijedi.

DZ 5.5. Neka su $A, B \in L(V)$, $AB = BA$, te neka je $M \leq V$ svojstveni potprostor za A. Dokažite da je M invarijantan potprostor za B.

Rješenje Pretpostavka je da je $Ax = \lambda x$, $\forall x \in M$. Ako je $x \in M$, onda je

$$A(Bx) = B(Ax) = B(\lambda x) = \lambda Bx$$

pa je $Bx \in M$. □

Definicija 5.16. Neka je $p(\lambda) = a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ proizvoljni polinom u jednoj varijabli λ s koeficijentima iz $\mathbb{F}$ i neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Tada pod matričnim polinomom podrazumijevamo

$$p(A) = a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \dots + a_1 A + a_0 I.$$

Napomena 5.17. Uočimo da potencije kvadratne matrice međusobno komutiraju pa s matričnim polinomima možemo postupati kao s polinomima u varijabli koja je element polja $\mathbb{F}$. Npr. vrijedi

$$A^2 - I = (A-I)(A+I) \text{ i } (A+I)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k.$$

Naravno, ovo ne vrijedi za matrične polinome u više varijabli, npr.

$$A^2 - B^2 \neq (A-B)(A+B).$$

Zadatak 5.18. Neka je matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je $A^k = 0$ i $A^{k-1} \neq 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Dokažite da je matrica $I - A$ regularna i nađite $(I-A)^{-1}$.

RJEŠENJE Pogledajmo polinom $p(A) = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$. Tada vrijedi $A^l \neq 0$ za $l = 1, 2, \cdots, k-1$ jer kad bi bilo $A^l = 0$, onda je $A^{k-1} = A^l \cdot A^{k-l-1} = 0$, što je suprotno pretpostavci zadatka. Sada je

$$\begin{aligned}(I - A)p(A) &= (I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})\\ &= I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} - A - A^2 - \cdots - A^k\\ &= I - A^k = I.\end{aligned}$$

Prema tome, $I - A$ je regularna matrica i $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$.

Teorem 5.18. *(Hamilton-Cayley) Svaka kvadratna matrica poništava svoj svojstveni polinom, tj. vrijedi $k_A(A) = 0$.*

NAPOMENA 5.19. Kako je $k_A(0) = \det A$, to je A je regularna matrica ako i samo ako je $k_A(0) \neq 0$.

NAPOMENA 5.20. Koristeći prethodnu napomenu i Hamilton-Cayleyev teorem, dobivamo još jednu metodu invertiranja regularnih matrica. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ regularna matrica, $k_A(\lambda) = k_n\lambda^n + \cdots + k_1\lambda + k_0$ njen karakteristični polinom. Prema Hamilton-Cayleyevom teoremu je $k_A(A) = 0$, tj.

$$k_nA^n + k_{n-1}A^{n-1} + \cdots + k_1A + k_0I = 0$$

i kako je A regularna matrica, vrijedi $k_0 \neq 0$. Stoga je

$$\begin{aligned}k_0I &= -k_nA^n - k_{n-1}A^{n-1} - \cdots - k_1A\\ I &= -\frac{k_n}{k_0}A^n - \frac{k_{n-1}}{k_0}A^{n-1} - \cdots - \frac{k_1}{k_0}A \quad /A^{-1}\\ A^{-1} &= -\frac{k_n}{k_0}A^{n-1} - \frac{k_{n-1}}{k_0}A^{n-2} - \cdots - \frac{k_1}{k_0}I.\end{aligned}$$

Inverz od A smo prikazali kao matrični polinom u A.

ZADATAK 5.19. Koristeći Hamilton-Cayleyev teorem odredite inverz matrice

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}.$$

RJEŠENJE

$$\begin{aligned}k_A(\lambda) &= \begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & -1\\ -1 & 3-\lambda & -1\\ -1 & 2 & -\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & -1\\ \lambda - 2 & 2-\lambda & 0\\ \lambda^2-\lambda-1 & 2-\lambda & 0\end{vmatrix}\\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2.\end{aligned}$$

Kako je $k_A(A) = 0$, imamo $-A^3 + 4A^2 - 5A + 2I = 0$, odakle slijedi

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(A^2 - 4A + 5I\right).$$

Kako je $A^2 = \begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ -3 & 6 & -2\\ -3 & 5 & -1\end{bmatrix}$, dobivamo

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}2 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 4\end{bmatrix}\right).$$

DZ 5.6. Odredite karakteristični polinom matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(rj. $k_A(\lambda) = (3-\lambda)(6-\lambda^2)$).

DZ 5.7. Koristeći Hamilton-Cayleyev teorem odredite A^{-1} za

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ -8 & -2 & -7 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

(rj. $A^{-1} = \frac{1}{32}\left(A^4 - 10A^3 + 40A^2 - 80A + 80I\right)$)

Zadatak 5.20. Neka je $A \in M_2(\mathbb{F})$, $A \neq \alpha I$, za svaki $\alpha \neq 0$. Dokažite da je A singularna ako i samo ako je A proporcionalna svom kvadratu.

Rješenje Za karakteristični polinom od A imamo

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\,\lambda + \det A.$$

Po Hamilton-Cayleyjevom teoremu je $k_A(A) = A^2 - (\operatorname{tr} A)\,A + (\det A)\,I = 0$. Matrica A je singularna ako i samo ako je $\det A = 0$.

Pretpostavimo najprije da je $\det A = 0$. Tada je $k_A(A) = A^2 - (\operatorname{tr} A)A = 0$, tj. $A^2 = (\operatorname{tr} A)A$.

S druge strane, ako je A proporcionalna A^2, onda postoji $\beta \in \mathbb{F}$ takav da je $A^2 = \beta A$. Nadalje, $k_A(A) = 0$, tj.

$$\underbrace{A^2}_{=\beta A} - (\operatorname{tr} A)\,A + (\det A)\,I = 0$$

pa je $(\beta - \operatorname{tr} A)\,A + (\det A)\,I = 0$. Imamo dva slučaja:

(a) $\operatorname{tr} A \neq \beta$. Tada je $A = \frac{\det A}{\operatorname{tr} A - \beta} I$ što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $A \neq \alpha I$, $\alpha \neq 0$, pa je to moguće samo ako je $\det A = 0$, tj. $A = 0$ što je očito singularna matrica.

(b) $\operatorname{tr} A = \beta$. Imamo da je $(\det A)I = 0$ odakle slijedi da je $\det A = 0$ pa je A singularna.

□

Napomena 5.21. Uočimo da iz uvjeta prethodnog zadatka vrijedi ako je $A^2 = \beta A$ i $A \neq 0$, onda je $\beta = \operatorname{tr} A$ (raspišite). Dakle, slučaj $\operatorname{tr} A \neq \beta$ je moguć samo za $A = 0$.

5.1 Sustavi linearnih rekurzija

Zadatak 5.21. Promatramo populaciju zečeva i lasica. Uočeno je da je svake godine broj zečeva uvijek jednak četverostrukom broju zečeva prošle godine umanjenom za dvostruki broj lasica prošle godine. Nadalje, broj lasica je jednak zbroju lanjskog broja zečeva i lanjskog broja lasica. Na početku je bilo 100 zečeva i 10 lasica. Nađite broj zečeva i broj lasica nakon n godina.

RJEŠENJE Označimo sa z_n broj zečeva nakon n godina, a sa l_n broj lasica nakon n godina. Iz uvjeta zadatka imamo

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= 4z_n - 2l_n \\ l_{n+1} &= z_n + l_n, \\ z_0 &= 100, \\ l_0 &= 10. \end{aligned}$$

Uvedimo oznake $x_n = \begin{bmatrix} z_n \\ l_n \end{bmatrix}$ i $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Gornji sustav rekurzija prelazi u matričnu jednadžbu

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Ax_n \\ x_0 &= \begin{bmatrix} 100 \\ 10 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sada je $x_n = A^n x_0$. Vrijedi $k_A(\lambda) = (4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$ pa je $\sigma(A) = \{2, 3\}$, $a(2) = g(2) = 1$ i $a(3) = g(3) = 1$. Dakle, A se može dijagonalizirati. Direktnim računom se lako vidi da je $V_A(2) = \text{Ker}(A - 2I) = \left[\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right]$ i $V_A(3) = \text{Ker}(A - 3I) = \left[\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right]$. Stoga je $A = P \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} P^{-1}$, gdje je $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Iz toga slijedi

$$A^n = P \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Iz početnih uvjeta možemo izračunati x_n

$$x_n = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180 \cdot 3^n - 80 \cdot 2^n \\ 90 \cdot 3^n - 80 \cdot 2^n \end{bmatrix}.$$

ZADATAK 5.22. Odredite opći član niza zadanog rekurzivno sa

$$a_{n+1} = \frac{5a_n + 2}{2a_n + 8},$$

ako je $a_1 = 3$.

RJEŠENJE Zapišimo a_n u obliku $\frac{x_n}{y_n}$. Tada je

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{5x_n + 2y_n}{2x_n + 8y_n}.$$

Nizove (x_n) i (y_n) definiramo tako da vrijedi

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 5x_n + 2y_n \\ y_{n+1} &= 2x_n + 8y_n, \\ x_1 &= 3 \\ y_1 &= 1. \end{aligned}$$

Tada je $z_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = Az_{n-1}$. Stoga je $z_n = A^{n-1}z_1$. Provjerimo može li se operator A dijagonalizirati. Vrijedi $k_A(\lambda) = \lambda^2 - 13\lambda + 36$, dakle, $\sigma(A) = \{4, 9\}$ pa je $a(4) = g(4) = 1$ i $a(9) = g(9) = 1$, tj. A se može dijagonalizirati. Imamo $V_A(4) = \operatorname{Ker}(A - 4I) = \left[\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}\right]$ i $V_A(9) = \operatorname{Ker}(A - 9I) = \left[\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}\right]$. Stoga je $A = PDP^{-1}$, gdje je $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$. Iz toga slijedi

$$A^n = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 9^n \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Iz početnih uvjeta možemo izračunati $z_n = A^{n-1}z_1$, odakle je

$$z_n = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4^{n-1} + 9^{n-1} \\ -4^{n-1} + 2 \cdot 9^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Napokon imamo $a_n = \dfrac{2 \cdot 4^{n-1} + 9^{n-1}}{-4^{n-1} + 2 \cdot 9^{n-1}}$. □

DZ 5.8. Riješite sustav linearnih rekurzija

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n + 6y_n \\ y_{n+1} &= 6x_n - 3y_n \\ x_1 &= 0, y_1 = -1 \end{aligned}$$

Rješenje

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{13}\left(6 \cdot (-7)^{n-1} - 6^n\right) \\ y_n &= -\frac{1}{13}\left(9 \cdot (-7)^{n-1} + 4 \cdot 6^{n-1}\right) \end{aligned}$$

□

DZ 5.9. Riješite sustav linearnih rekurzija

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= tx_n + (1-t)y_n \\ y_{n+1} &= (1-t)x_n + ty_n \\ x_1 &= 0, y_1 = 1 \end{aligned}$$

Rješenje

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2}\left(1 - (2t-1)^n\right) \\ y_n &= \frac{1}{2}\left(1 + (2t-1)^n\right) \end{aligned}$$

□

Zadatak 5.23. Fibonaccijev niz (F_n) zadan je rekurzivno kao

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Odredite opći član niza.

RJEŠENJE Uvedimo novi niz $G_n = F_{n-1}$ i dobivamo sustav rekurzivnih relacija

$$\begin{aligned} F_n &= F_{n-1} + G_{n-1} \\ G_n &= F_{n-1} \end{aligned}$$

Označimo $x_n = \begin{pmatrix} F_n \\ G_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pa naš sustav postaje

$$x_n = Ax_{n-1} = \ldots = A^{n-1}x_1, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Karakteristični polinom matrice sustava je

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

pa je $\sigma(A) = \{\lambda_{1,2}\} = \left\{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$. Svojstveni potprostori su

$$V_A(\lambda_1) = \left[\left\{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right], \quad V_A(\lambda_2) = \left[\left\{\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right].$$

Sada imamo

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

pa je

$$x_n = PD^{n-1}P^{-1}x_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dakle,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

DZ 5.10. Odredite $\det A_n$, gdje je

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

RJEŠENJE

$$\det A_n = \frac{1}{9}\left(5^{n+1} - (-4)^{n+1}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Primijetite da za razliku od metode rekurzivnih relacija za računanje determinanti koju smo obradili u kolegiju *Linearna algebra 1*, sad imamo način računanja rekurzivnih relacija koje imaju dubinu veću od 2. Na primjer, želimo li riješiti sustav rekurzivnih relacija

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1} \\ y_n &= x_{n-1} \\ z_n &= y_{n-1} \end{aligned}$$

možemo to napraviti kao i prije tako da dijagonaliziramo matricu sustava

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Primijetimo također da je rješenje ovog sustava zapravo rješenje rekurzivne relacije

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3}.$$

Karakteristična jednadžba ove rekurzivne relacije je zapravo karakteristični polinom matrice (5.6). Brojevi (F_n) zovu se *tribonaccijevi brojevi.*

ZADATAK 5.24. Za $q_1 \in \mathbb{Q}^+$ definiramo $q_{n+1} = \frac{2+q_n}{1+q_n}$ (nije linearna rekurzija). Odredite opći član danog niza ako je $q_1 = 1$ i dokažite da je $\lim q_n = \sqrt{2}$.

RJEŠENJE Svi brojevi q_n su racionalni pa je $q_n = \frac{a_n}{b_n}$, za $a_n, b_n \in \mathbb{N}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Odabir brojeva a_n i b_n naravno nije jedinstven, ali nas zanima samo q_n pa je svejedno koje a_n, b_n uzmemo. Primijetimo da je

$$q_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{2 + \frac{a_n}{b_n}}{1 + \frac{a_n}{b_n}} = \frac{a_n + 2b_n}{a_n + b_n}.$$

Stavimo

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 2b_n \\ b_{n+1} &= a_n + b_n \end{aligned}$$

i riješimo ovaj sustav na standardni način. Stavimo $z_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ i $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ pa je

$$z_{n+1} = Az_n = \ldots = A^n z_1.$$

Imamo

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 1$$

pa je $\sigma(A) = \{1 \pm \sqrt{2}\}$. Također je

$$V_A(1+\sqrt{2}) = \left[\left\{\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right], \quad V_A(1-\sqrt{2}) = \left[\left\{\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right].$$

Slijedi da je

$$\begin{aligned} z_{n+1} = A^n z_1 = PD^nP^{-1}z_1 &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{2})^n \end{pmatrix} \frac{1}{-2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)^n \\ \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(\frac{-1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sada vidimo da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)^n}{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{2}\right)^n} = \ldots = \sqrt{2}.$$

□

Poglavlje 6

Unitarni prostori

6.1 Definicije i osnovna svojstva

Definicija 6.1. Neka je U (konačnodimenzionalan) vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Neka je $\langle \cdot, \cdot \rangle : U \times U \to \mathbb{F}$ preslikavanje sa svojstvima:

(1) $\langle a, a \rangle \geq 0$

(2) $\langle a, a \rangle = 0$ ako i samo ako je $a = 0$,

(3) $\langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle$,

(4) $\langle \alpha a, b \rangle = \alpha \langle a, b \rangle$,

(5) $\langle a, b \rangle = \overline{\langle b, a \rangle}$

za sve $a, b, c \in U$, $\alpha \in \mathbb{F}$. Preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zovemo **skalarno množenje** na prostoru U, a skalar $\langle a, b \rangle$ **skalarni produkt** vektora a i b. Uređeni par $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ zovemo **unitarni prostor** nad poljem $\mathbb{F}$.

Napomena 6.2. Dimenzija unitarnog prostora $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ po definiciji je dimenzija vektorskog prostora U.
Skalarni produkt se umjesto $\langle a, b \rangle$ piše i kao $(a, b) = (a|b)$.
Direktno iz definicije unitarnog prostora slijede ova njegova svojstva:

(1') $\langle a, \beta b \rangle = \overline{\beta} \langle a, b \rangle$,

(2') $\langle a, b + c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$,

za sve $a, b, c \in U$, $\beta \in \mathbb{F}$. Također vrijedi

(3') $\langle a, 0 \rangle = \langle 0, a \rangle = 0$, za sve $a \in U$.

Primjer 6.3. 1. Na prostoru $\mathbb{F}^n$ definiramo preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ s

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}, \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{F}^n.$$

Ovo je skalarni produkt na $\mathbb{F}^n$. Provjerimo mu svojstva:

(1) $\langle y, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i \overline{x_i} = \overline{\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}} = \overline{\langle x, y \rangle}$,

(2) $\langle \alpha x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i)\, \overline{y_i} = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = \alpha \langle x, y\rangle$,

(3) $\langle x+y, z\rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\, \overline{z_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{z_i} + \sum_{i=1}^{n} y_i \overline{z_i} = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,

(4) Neka je $x \neq 0$. Tada je $x_i \neq 0$, za bar jedan i pa je

$$\langle x, x\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{x_j} = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 = |x_i|^2 + \sum_{j\neq i}^{n} |x_j|^2 > 0.$$

Zato je $(\mathbb{F}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ unitarni prostor.

2. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Znamo da je $C\,[a,b]$ (beskonačnodimenzionalni) vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ uz operacije:

$$\begin{aligned} \text{zbrajanje: } & (f+g)(t) := f(t) + g(t), \\ \text{množenje skalarom: } & (\alpha f)(t) := \alpha f(t). \end{aligned}$$

Definirajmo preslikavanje $\langle\cdot,\cdot\rangle : C([a,b]) \times C([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ sa:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt, \quad f, g \in C([a,b]).$$

Ovo je dobro definirano preslikavanje i zadovoljava svojstva skalarnog produkta. Svojstva (1)-(3) proizlaze direktno iz svojstava Riemannovog integrala. Nadalje,

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f(t) f(t) dt \geq \text{ monotonost integrala } \geq \int_a^b 0 dt = 0.$$

Ako je $\langle f, f\rangle = 0$, onda je $f \equiv 0$ na $[a,b]$. Zaista, ako je $f(t_0) \neq 0$ za neko $t_0 \in [a,b]$, onda zbog neprekidnosti funkcije f postoji neka okolina $o(t_o)$ točke t_0 takva da je $f(t) \neq 0$ za sve $t \in o(t_0)$. No, tada je $\int_{o(t_0)} f(t)^2 dt > 0$ pa je i $\langle f, f\rangle > 0$.

3. Ne prostoru $M_n(\mathbb{C})$ definiramo preslikavanje $\langle\cdot,\cdot\rangle : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ sa $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^*)$. Ovo je skalarni produkt na $M_n(\mathbb{C})$. Provjerimo mu svojstva:

(1) Za $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ je $\operatorname{tr}(BA^*) = \operatorname{tr}((AB^*)^*) = \overline{\operatorname{tr}(AB^*)}$ pa je $\langle B, A\rangle = \overline{\langle A, B\rangle}$.

(2) Za $\alpha \in \mathbb{C}$ i $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ je: $\langle \alpha A, B\rangle = \operatorname{tr}((\alpha A) B^*) = \alpha \operatorname{tr}(AB^*) = \alpha\langle A, B\rangle$.

(3) Za $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$ je: $\langle A+B, C\rangle = \operatorname{tr}((A+B)C^*) = \operatorname{tr}(AC^* + BC^*) = \operatorname{tr}(AC^*) + \operatorname{tr}(BC^*) = \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle$.

(4) Neka je $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$. Stoga postoje $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ takvi da je $a_{ij} \neq 0$. Sada imamo:

$$\langle A, A\rangle = \operatorname{tr}(AA^*) = \sum_{k=1}^{n} (AA^*)_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\overline{a_{kl}} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} |a_{kl}|^2 > 0.$$

Dakle, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je skalarno množenje i $(M_n(\mathbb{C}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je unitarni prostor.

4. Na prostoru $V^3(O)$ definiramo preslikavanje $\langle\cdot,\cdot\rangle : V^3(O) \times V^3(O) \to \mathbb{R}$ s

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &:= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}), \quad \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &:= 0, \quad \text{za } \vec{a} = \vec{0} \text{ ili } \vec{b} = \vec{0} \end{aligned}$$

Ovo je skalarni produkt na $V^3(0)$. Provjerimo mu svojstva:

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0 = |\vec{a}|^2 \geq 0$, a jednakost vrijedi ako i samo ako je $|\vec{a}| = 0$, tj. ako i samo ako je $\vec{a} = \vec{0}$.

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ (dokazati geometrijski `https://en.wikipedia.org/wiki/Dot_product#/media/File:Dot_product_distributive_law.svg`)

(3) $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$, komentiraj za $\alpha > 0, \alpha < 0, \alpha = 0$.

(4) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\angle(\vec{b},\vec{a}) = \vec{b}\cdot\vec{a}$.

Zato je $(V^3(O), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ unitarni prostor.

Zadatak 6.1. Provjerite je li preslikavanje definirano s

$$\langle(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = 2x_1y_1 + 4x_1y_2 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3$$

skalarni produkt na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$.

Rješenje Uzmimo npr. $x = (1,0,0), y = (1,1,0)$. Sada je

$$\langle x,y\rangle = \langle(1,0,0),(1,1,0)\rangle = 2\cdot1\cdot1 + 4\cdot1\cdot1 + 3\cdot0\cdot1 + 5\cdot0\cdot0 = 6, \tag{6.1}$$
$$\langle y,x\rangle = \langle(1,1,0),(1,0,0)\rangle = 2\cdot1\cdot1 + 4\cdot1\cdot0 + 3\cdot1\cdot0 + 5\cdot0\cdot0 = 2. \tag{6.2}$$

Dakle, postoje $x, y \in \mathbb{R}^3$ takvi da $\langle x,y\rangle \neq \langle y,x\rangle$ pa zaključujemo da preslikavanje nije skalarni produkt. □

Zadatak 6.2. U sljedećim zadacima $\mathbb{C}^2$ i $M_n(\mathbb{R})$ promatramo kao unitarne prostore sa standardnim skalarnim produktom.

(a) Odredite sve $z \in \mathbb{C}$ takve da je

$$\langle(1,z),(2-i,3+2i)\rangle = i$$

(b) Ako je $A \in M_n$ antisimetrična matrica, dokažite da je $\langle A, I\rangle = 0$.

Rješenje

(a) Vrijedi $\langle(1,z),(2-i,3+2i)\rangle = i$ ako i samo ako je $1\cdot(2+i) + z\cdot(3-2i) = i$. Iz toga vidimo da je jedino rješenje $z = \frac{-2}{3-2i} = \frac{-6}{13} - i\frac{4}{13}$.

(b) Budući da je A antisimetrična matrica, vrijedi $a_{ii} = 0$ za sve $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ pa je $\operatorname{tr} A = 0$, a onda je $\langle A, I\rangle = \operatorname{tr}(AI^*) = \operatorname{tr} A = 0$.

□

Teorem 6.4. ***(nejednakost Cauchy -Schwarz-Bunjakovskog:)*** *Neka je U unitarni prostor i $a, b \in U$ bilo koji njegovi vektori. Tada vrijedi:*

$$|\langle a,b\rangle|^2 \leq \langle a,a\rangle\cdot\langle b,b\rangle.$$

Znak jednakosti vrijedi ako i samo ako su vektori a i b linearno zavisni.

Napomena 6.5. Na spomenutim unitarnim prostorima $C-S-B$ nejednakost izgleda ovako:

(1) Na $\mathbb{F}^n$ je $|\sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}|^2 \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)\cdot(\sum_{i=1}^n |y_i|^2)$, uz $x_i, y_i \in \mathbb{F}, i = 1,\cdots,n$.

(2) Na $C([a,b])$ je $(\int_a^b f(t)g(t)dt)^2 \leq (\int_a^b (f(t)^2)dt)(\int_a^b (g(t))^2dt)$.

(3) Na $M_n(\mathbb{C})$ je $|\operatorname{tr}(AB^*)|^2 \leq \operatorname{tr}(AA^*)\operatorname{tr}(BB^*)$.

Zadatak 6.3. Dokažite da za svaka 4 realna broja a, b, c, d vrijede nejednakosti

a) $|a + 2b + 3c + 4d| \leq \sqrt{30(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}$

b) $|a + b + c + d| \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + 2)(c^2 + d^2 + 2)}$

Rješenje

a) Uz standardni sklarani produkt na $\mathbb{R}^4$ uočimo da iz C-S-B nejednakosti slijedi

$$|\langle (a, b, c, d), (1, 2, 3, 4)\rangle| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)},$$

tj. $|a + 2b + 3c + 4d| \leq \sqrt{30(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}$

b) Ponovno, uz standardni sklarani produkt na $\mathbb{R}^4$ uočimo da iz C-S-B nejednakosti slijedi

$$|\langle (a, b, 1, 1), (1, 1, c, d)\rangle| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{(a^2 + b^2 + 2)(c^2 + d^2 + 2)},$$

tj. $|a + b + c + d| \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + 2)(c^2 + d^2 + 2)}$

Definicija 6.6. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ preslikavanje sa svojstvima:

(1) $\|x\| \geq 0$, za svako $x \in V$,

(2) $\|x\| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$,

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ za svako $x \in V$,

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, za svako $x, y \in V$.

Tada kažemo da je $\|\cdot\|$ **norma** na V, a uređeni par $(V, \|\cdot\|)$ zovemo **normirani prostor**.

Napomena 6.7. (1) Neka je $(U, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ neki unitarni prostor. Tada je sa

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, x \in U$$

definirano preslikavanje $\|\cdot\| : U \longrightarrow \mathbb{R}$ koje je norma na U pa je $(U, \|\cdot\|)$ normirani prostor. Prema tome, svaki unitarni prostor je ujedno i normirani prostor. No, obrat ne vrijedi. Klasa normiranih prostora je šira od klase unitarnih prostora.

(2) U terminima norme inducirane skalarnim produktom na unitarnom prostoru U, nejednakost $C - S - B$ poprima oblik

$$|\langle a, b\rangle| \leq \|a\|\|b\|,$$

za svaki izbor $a, b \in U$. Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori a i b linearno zavisni.

(3) Po uzoru na $V^3(O)$ i u proizvoljnom realnom unitarnom prostoru U možemo definirati **kut vektora** x i y, uz $x, y \neq 0$ sa

$$\cos\angle(x, y) = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

Uočimo da je gornja definicija dobra upravo zbog $C - S - B$.

DEFINICIJA 6.8. Neka je U unitarni prostor. Za vektor $a \in U$ kažemo da je **jedinični** ili **normiran** ako je $\|a\| = 1$.

NAPOMENA 6.9. Svaki vektor $a \in U, a \neq 0$ možemo normirati, tj. pridružiti mu vektor $a_0 = \frac{a}{\|a\|}$.

ZADATAK 6.4. Zadan je normirani prostor $(M_2(\mathbb{C}), || \cdot ||)$, gdje je norma inducirana standardnim skalarnim produktom na $M_2(\mathbb{C})$. Odredite normu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ 2 & 3. \end{bmatrix}$$

RJEŠENJE Vrijedi $||A|| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{\operatorname{tr}(AA^*)} = \sqrt{0^2 + (-i) \cdot i + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$. $\square$

ZADATAK 6.5. Navedite neku bazu prostora simetričnih matrica reda 3, a zatim odredite duljinu svih njenih elemenata.

RJEŠENJE Jedna baza prostora simetričnih matrica reda 3 je dana s

$$\{E_{ij} + E_{ji} : i, j = 1, 2, 3, i \neq j\} \cup \{E_{ii}, i \in 1, 2, 3\}.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} \|E_{ij} + E_{ji}\| &= \sqrt{\langle E_{ij} + E_{ji}, E_{ij} + E_{ji}\rangle} \\ &= \sqrt{\operatorname{tr}((E_{ij} + E_{ji}) \cdot (E_{ij} + E_{ji})^*)} \\ &= \sqrt{\operatorname{tr}((E_{ij} + E_{ji}) \cdot (E_{ji} + E_{ij}))} \\ &= \sqrt{\operatorname{tr}(E_{ii} + E_{jj})} = \sqrt{2}, \end{aligned}$$

dok je

$$\|E_{ii}\| = \sqrt{\langle E_{ii}, E_{ii}\rangle} = \sqrt{\operatorname{tr}(E_{ii} \cdot E_{ii}^*)} = \sqrt{\operatorname{tr}(E_{ii} \cdot E_{ii})} = \sqrt{\operatorname{tr} E_{ii}} = 1.$$

$\square$

ZADATAK 6.6. Odredite sve jedinične vektore $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ takve da izraz $|\langle x, a\rangle|$ ima maksimalnu moguću vrijednost, pri čemu je $a = (1, 2, 3)$. Kolika je ta vrijednost?

RJEŠENJE Iz C-S-B nejednakosti slijedi

$$|\langle x, a\rangle| \leq \|x\| \cdot \|a\| = \|a\| = \sqrt{14}.$$

Jednakost se postiže ako i samo ako su vektori x i a linearno zavisni, odnosno ako i samo ako je

$$(x_1, x_2, x_3) = \lambda(1, 2, 3),$$

za neki $\lambda \in \mathbb{R}$. Kako je x jedinični vektor, za jednakost je nužno i dovoljno $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}$. Dakle, maksimalna vrijednost je $\sqrt{14}$ i ona se postiže za $(x_1, x_2, x_3) = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)$. $\square$

ZADATAK 6.7. Dokažite da u svakom unitarnom prostoru U vrijedi relacija paralelograma, tj. da je

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,$$

RJEŠENJE

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle + \langle x - y, x - y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= 2\langle x, x\rangle + 2\langle y, y\rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \end{aligned}$$

$\square$

ZADATAK 6.8. Neka je U realan unitaran prostor i neka su $x, y \in U$. Dokažite da vrijede sljedeće tvrdnje:

(1) $\|x\| = \|y\|$ ako i samo ako je $\langle x+y, x-y\rangle = 0$.

(2) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ako i samo ako je $\langle x, y\rangle = 0$.

RJEŠENJE

(1) $\langle x+y, x-y\rangle = 0 \iff \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle - \langle y, y\rangle = 0$. Kako je U realan unitaran prostor, to je $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ pa je $\langle x+y, x-y\rangle = 0 \iff \|x\|^2 = \|y\|^2 \iff \|x\| = \|y\|$.

(2) $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$. Stoga je $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ako i samo ako je $\langle x, y\rangle = 0$.

Neka je U unitarni prostor i $\{a_1, \ldots, a_m\}$ proizvoljan skup vektora iz U. Taj skup će biti linearno zavisan ili nezavisan ovisno o tome ima li (vektorska) jednadžba

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = 0 \tag{6.3}$$

i netrivijalnih rješenja ili samo trivijalno rješenje.
Pretpostavimo da je $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ rješenje jednadžbe (6.3). Pomnožimo ovu relaciju skalarno redom s $a_1, \ldots, a_m$:

$$\begin{aligned}
\lambda_1\langle a_1, a_1\rangle + \lambda_2\langle a_2, a_1\rangle + \ldots + \lambda_m\langle a_m, a_1\rangle &= 0\\
\lambda_1\langle a_1, a_2\rangle + \lambda_2\langle a_2, a_2\rangle + \ldots + \lambda_m\langle a_m, a_2\rangle &= 0\\
&\vdots\\
\lambda_1\langle a_1, a_m\rangle + \lambda_2\langle a_2, a_m\rangle + \ldots + \lambda_m\langle a_m, a_m\rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Dobili smo homogen sustav m linearnih jednadžbi s m nepoznanica čije je rješenje $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$. Vrijedi i obratno, ako je $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ rješenje ovog homogenog sustava linearnih jednadžbi, onda je to i rješenje od (6.3). Zaista, jednadžbe sustava možemo zapisati kao

$$\langle \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m, a_i\rangle = 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m,$$

odakle slijedi da je

$$\langle \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m, \lambda_i a_i\rangle = \overline{\lambda_i}\langle \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m, a_i\rangle = 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m,$$

pa zbrajanjem svih tih jednakosti dobijemo

$$\langle \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m\rangle = 0,$$

odakle slijedi $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = 0$. Dakle, $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ je rješenje jednadžbe (6.3). Prema tome, jednadžba (6.3) ima isti skup rješenja kao i spomenuti homogeni sustav.
Matrica sustava je:

$$G(a_1, \ldots, a_m) = \begin{bmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \langle a_2, a_1\rangle & \cdots & \langle a_m, a_1\rangle \\ \langle a_1, a_2\rangle & \langle a_2, a_2\rangle & \cdots & \langle a_m, a_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_1, a_m\rangle & \langle a_2, a_m\rangle & \cdots & \langle a_m, a_m\rangle \end{bmatrix}$$

i to je **Gramova matrica** skupa vektora $\{a_1, \ldots, a_m\}$.
Gornji sustav će imati i netrivijalnih rješenja, tj. $a_1, \ldots, a_m$ će biti linearno zavisni vektori ako i samo ako je determinanta sustava $\Gamma(a_1, \ldots, a_m) = \det G(a_1, \ldots, a_m) = 0$.

ZADATAK 6.9. Provjerite jesu li vektori $a = (3, 5, 8)$ i $b = (4, 0, 9) \in \mathbb{R}^3$ linearno nezavisni.
RJEŠENJE
$$\Gamma(a, b) = \begin{vmatrix} \langle a, a\rangle & \langle b, a\rangle \\ \langle a, b\rangle & \langle b, b\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 98 & 84 \\ 84 & 97 \end{vmatrix} \neq 0.$$
Prema tome, vektori a i b su linearno nezavisni. □

NAPOMENA 6.10. Geometrijska interpretacija Grammove determinante u ravnini je sljedeća:
$$\Gamma(a, b) = |a|^2|b|^2 - |a|^2|b|^2(\cos\angle(a, b))^2 = |a|^2|b|^2(\sin\angle(a, b))^2 = P^2,$$
pri čemu je P površina paralelograma razapetog vektorima a i b.

6.2 Ortonormirani sustavi vektora

DEFINICIJA 6.11. Neka je U unitarni prostor i $a, b \in U$. Kažemo da je vektor a **ortogonalan (okomit)** na vektor b i pišemo $a \perp b$ ako je $\langle a, b\rangle = 0$.
NAPOMENA 6.12. (1) Ako je vektor a okomit na vektor b, onda je i b okomit na a.

(2) Nul-vektor je okomit na sve vektore i to je jedini vektor s tim svojstvom.
ZADATAK 6.10. Zadani su polinomi $p(x) = 1 + x^2$ i $q(x) = x^2 + x - \frac{2}{5}$ u unitarnom prostoru $\mathcal{P}_2$ sa skalarnim produktom
$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$
Ispitajte jesu li p i q ortogonalni.
RJEŠENJE Vrijedi $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx = 0$, dakle, p i q su ortogonalni polinomi. □

DEFINICIJA 6.13. Neka je $S = \{a_1, \ldots, a_m\}$ skup vektora iz unitarnog prostora U sa svojstvom da je $a_i \neq 0$ za $i = 1, \ldots, m$. Kažemo da je skup S

1. **ortogonalan sustav vektora** ako je $a_i \perp a_k$ za sve $i, k \in \{1, \ldots, m\}, i \neq k$.
2. **ortonormiran sustav vektora** ako je S ortogonalan sustav vektora i vrijedi $\|a_i\| = 1$ za sve $i = 1, \ldots, m$.

Specijalno, ako je S ortonormiran skup i baza, kažemo da je S **ortonormirana baza** za U.
NAPOMENA 6.14. Svaki ortogonalni skup vektora $\{a_1, \ldots, a_m\}$ takvih da je $a_i \neq 0$ za sve $i \in \{1, \cdots, m\}$ je linearno nezavisan. Zaista,
$$\Gamma(a_1, \ldots, a_m) = \begin{vmatrix} \|a_1\|^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \|a_2\|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \|a_3\|^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \|a_m\|^2 \end{vmatrix} = \|a_1\|^2 \cdots \|a_m\|^2 \neq 0.$$
Nadalje, ako je dimenzija unitarnog prostora U jednaka n i $\{a_1, \ldots, a_m\}$ ortogonalni sustav u prostoru U pri čemu su svi $a_i \neq 0$, onda je $m \leq n$.
ZADATAK 6.11. Neka je $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ ortogonalni sustav vektora u U. Dokažite **Pitagorin teorem**:
$$\|a_1 + \ldots + a_m\|^2 = \|a_1\|^2 + \ldots + \|a_m\|^2.$$

RJEŠENJE Po pretpostavci je $\langle a_i, a_j\rangle = 0$ za $i \neq j$. Stoga je

$$\|a_1 + \ldots + a_m\|^2 = \langle a_1 + \ldots + a_m, a_1 + \ldots + a_m\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\langle a_i, a_j\rangle = \sum_{i=1}^{m}\|a_i\|^2.$$

Neka je sada $\{a_1, \ldots, a_m\}$ proizvoljan linearno nezavisan skup vektora unitarnog prostora U. Želimo pronaći ortonormirani sustav vektora $\{e_1, \ldots, e_m\}$ iz U takav da vrijedi $[\{a_1, \ldots, a_m\}] = [\{e_1, \ldots, e_m\}]$, tj. želimo konstruirati ortonormiranu bazu za $[\{a_1, \ldots, a_m\}]$.

Teorem 6.15. *(Gram - Schmidt) Neka je $S = \{a_1, \ldots, a_m\}$ linearno nezavisan sustav vektora iz unitarnog prostora U. Tada postoji sustav vektora $T = \{e_1, \ldots, e_m\}$ u U sa svojstvima:*

(1) T je ortonormirani sustav

(2) $[\{a_1, \ldots, a_k\}] = [\{e_1, \ldots, e_k\}]$ za sve $k = 1, \ldots, m$.

NAPOMENA 6.16. (1) Vektore

$$\{e_1, \ldots, e_m\}$$

definiramo induktivno s:

$$e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}, \quad b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1}\langle a_k, e_i\rangle e_i, \quad e_k = \frac{b_k}{\|b_k\|}, \quad k = 2, \cdots, m.$$

(2) Iz gornjeg teorema slijedi da svaki konačnodimenzionalni unitarni prostor ima ortonormiranu bazu.

(3) Svaki ortogonalni sustav u konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru može se nadopuniti do ortogonalne baze tog prostora.

ZADATAK 6.12. U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^3$ sa standardnim skalarnim produktom dani su vektori $a_1 = (1,2,2), a_2 = (1,-2,0)$ i $a_3 = (-1,0,1)$. Dokažite da su ti vektori linearno nezavisni i ortonormirajte ih.

RJEŠENJE Imamo $e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{3}(1,2,2)$. Nadalje, $b_2 = a_2 - \langle a_2, e_1\rangle e_1 = \frac{1}{3}(4,-4,2)$ pa je $e_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{3}(2,-2,1)$. Konačno,

$$b_3 = a_3 - \langle a_3, e_1\rangle e_1 - \langle a_3, e_2\rangle e_2 = \frac{1}{9}(-8,-4,8)$$

pa je $e_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = \frac{1}{3}(-2,-1,2)$. Pošto je $\dim[\{a_1, a_2, a_3\}] = \dim[\{e_1, e_2, e_3\}] = 3$, to su vektori a_1, a_2, a_3 linearno nezavisni.

NAPOMENA 6.17. Općenito, vektori $\{a_1, \ldots, a_m\}$ su linearno zavisni ako i samo ako se postupak ortogonalizacije ne može provesti.

ZADATAK 6.13. U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_2$, skupa polinoma s realnim koeficijentima stupnja manjeg ili jednakog dva, sa standardnim skalarnim produktom

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt, \quad p, q \in \mathcal{P}_2$$

ortonormirajte standardnu bazu $\{1, t, t^2\}$.

RJEŠENJE Uvedimo oznake $p_1(t) = 1,\ p_2(t) = t,\ p_3(t) = t^2$. Uočimo da je

$$\|p_1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} dt} = \sqrt{t\Big|_{-1}^{1}} = \sqrt{1-(-1)} = \sqrt{2}.$$

Stoga je $e_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} p_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dalje imamo

$$\begin{aligned}
b_2(t) &= p_2(t) - \langle p_2, e_1\rangle e_1(t) = t - \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} tdt\right) = t - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_{-1}^{1} = t \\
e_2(t) &= \frac{b_2(t)}{\|b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} t^2 dt}} b_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}t^3\Big|_{-1}^{1}}} b_2(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t \\
b_3(t) &= p_3(t) - \langle p_3, e_1\rangle e_1 - \langle p_3, e_2\rangle e_2 = t^2 - \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} t^2 dt\right) - \frac{3}{2}t\left(\int_{-1}^{1} t^3 dt\right) = t^2 - \frac{1}{3} \\
e_3(t) &= \frac{b_3(t)}{\|b_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1}(t^2-\frac{1}{3})^2 dt}} b_3(t) = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

□

ZADATAK 6.14. U unitarnom prostoru $M_2(\mathbb{C})$ sa standardnim skalarnim produktom

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*), \quad A, B \in M_2(\mathbb{C})$$

ortonormirajte bazu $\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\right\}$ i prikažite matricu $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ u toj ortonormiranoj bazi.

RJEŠENJE Uvedimo oznake

$$A_1 = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{A_1}{\|A_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \\
B_2 &= A_2 - \langle A_2, E_1\rangle E_1 = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix} \\
E_2 &= \frac{B_2}{\|B_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix} \\
B_3 &= A_3 - \langle A_3, E_1\rangle E_1 - \langle A_3, E_2\rangle E_2 = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}0 & 0\\ -6 & 3\end{bmatrix} \\
E_3 &= \frac{B_3}{\|B_3\|} = \frac{1}{\sqrt{45}}\begin{bmatrix}0 & 0\\ -6 & 3\end{bmatrix} \\
B_4 &= A_4 - \langle A_4, E_1\rangle E_1 - \langle A_4, E_2\rangle E_2 - \langle A_4, E_3\rangle E_3 = \begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \\
E_4 &= \frac{B_4}{\|B_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0.\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Znamo da je $A = \langle A, E_1\rangle E_1 + \langle A, E_2\rangle E_2 + \langle A, E_3\rangle E_3 + \langle A, E_4\rangle E_4 = \sqrt{2}E_1 + \frac{3}{\sqrt{5}}E_2 - \frac{1}{\sqrt{5}}E_3$. □

DZ 6.1. U kompleksnom unitarnom prostoru $\mathbb{C}^3$ sa standardnim skalarnim produktom odredite ortonormiranu bazu prostora razapetog vektorima

$$a = (1+i, 1-i, 1), \quad b = (1-i, i, 2+i) \quad \text{i} \quad c = (i, 3-2i, 4).$$

ZADATAK 6.15. Neka je $\{e_1, \ldots, e_m\}$ ortonormirani sustav u konačnodimenzionalnom prostoru U, $a \in U$ proizvoljni vektor. Vrijedi **Besselova nejednakost**:

$$\langle a, a\rangle \geq |\langle a, e_1\rangle|^2 + |\langle a, e_2\rangle|^2 + \cdots + |\langle a, e_m\rangle|^2.$$

RJEŠENJE Kako je $\{e_1, \ldots, e_m\}$ ortonormirani sustav vektora, taj skup je linearno nezavisan pa ga možemo dopuniti do ortonormirane baze $\{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ za U. Za proizvoljni $a \in U$ je $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Stoga je

$$\langle a, e_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, e_j \right\rangle = \alpha_j.$$

Sada je

$$\langle a, a\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \geq \sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^m |\langle a, e_i\rangle|^2.$$

NAPOMENA 6.18. Koeficijenti $\alpha_i = \langle a, e_i\rangle$ iz prethodnog zadatka se zovu **Fourierovi koeficijenti** koeficijenti a.

ZADATAK 6.16. Dokažite da je ortonormirani sustav $\{e_1, \ldots, e_m\}$ u U baza za konačnodimenzionalni unitarni prostor U ako i samo za svaki $a \in U$ vrijedi **Parsevalova jednakost**:

$$\langle a, a\rangle = |\langle a, e_1\rangle|^2 + |\langle a, e_2\rangle|^2 + \cdots + |\langle a, e_m\rangle|^2.$$

RJEŠENJE

$\boxed{\Rightarrow}$ Predavanja. Neka je $\{e_1, \ldots, e_m\}$ ortonormirana baza. Za proizvoljni $a \in U$ postoje skalari $\alpha_i, i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ takvi da je $a = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i$ pa je:

$$\langle a, a\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle e_i, e_i\rangle = \sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2.$$

Nadalje, uočimo da je $\langle a, e_i\rangle = \alpha_i$ pa je $\langle a, a\rangle = |\langle a, e_i\rangle|^2 + |\langle a, e_2\rangle|^2 + \cdots + |\langle a, e_m\rangle|^2$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Kako je $\{e_1, \ldots, e_m\}$ ortonormirani sustav vektora, taj skup je linearno nezavisan pa ga možemo nadopuniti do ortonormirane baze $\{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ za U. Za proizvoljni vektor $a \in U$ ja tada $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, gdje je $\alpha_i = \langle a, e_i\rangle$. Po pretpostavci zadatka je

$$\langle a, a\rangle = \sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2.$$

S druge strane je $\langle a, a\rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2 + \sum_{i=m+1}^n |\alpha_i|^2$ iz čega slijedi da je $\alpha_{m+1} = \ldots = \alpha_n = 0$. Stoga je $a = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i$. Kako je $a \in U$ bio proizvoljan vektor, zaključujemo da je $\{e_1, \ldots, e_m\}$ sustav izvodnica za U. Kako je ujedno i linearno nezavisan, taj skup je baza za U i to ortonormirana.

ZADATAK 6.17. Dokažite da je ortonormirani sustav $\{e_1, \ldots, e_m\}$ ortonormirana baza unitarnog prostora U ako i samo ako za sve $a, b \in U$ vrijedi

$$\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle a, e_i\rangle\langle e_i, b\rangle. \tag{6.4}$$

RJEŠENJE

$\boxed{\Rightarrow}$ Predavanja. Neka je $\{e_1, \ldots, e_m\}$ ortonormirana baza. Tada je za $a, b \in U$

$$a = \sum_{i=1}^{m} \langle a, e_i\rangle e_i \quad \text{i} \quad b = \sum_{i=1}^{m} \langle b, e_i\rangle e_i$$

pa je

$$\langle a, b\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{m} \langle a, e_i\rangle e_i, \sum_{j=1}^{m} \langle b, e_j\rangle e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \langle a, e_i\rangle\overline{\langle b, e_j\rangle}\langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle a, e_i\rangle\langle e_i, b\rangle,$$

što dokazuje tvrdnju.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ako stavimo $a = b$ u (6.4), dobit ćemo Parsevalovu jednakost, pa tvrdnja slijedi prema prethodnom zadatku.

□

6.3 QR faktorizacija

Prisjetimo se LU faktorizacije kvadratne matrice A: $A = LU$, gdje je L donjetrokutasta, a U gornjetrokutasta. Ideja je bila da je lakše rješavati dva trokutasta sustava $Ux = y$, $Ly = b$ nego $Ax = b$.

Ovdje je ideja da A napišemo u obliku $A = QR$, gdje je Q ortogonalna, a R gornjetrokutasta.

ALGORITAM. Neka je $A = [S_1\ S_2\ \ldots\ S_n]$, pri čemu su $\{S_1, \ldots, S_n\}$ stupci matrice A. Pomoću Gram–Schmidtovog postupka ortonormiramo stupce $\{S_1, \ldots, S_n\}$ i dobijemo skup $\{E_1, \ldots, E_r\}$, gdje je $r = r(A)$. Pritom smo izbacili one stupce S_i koji se mogu zapisati kao linearna kombinacija svojih prethodnika. Stavimo

$$Q := [E_1\ E_2\ \ldots\ E_r], \quad R := \begin{bmatrix} \langle S_1, E_1\rangle & \langle S_2, E_1\rangle & \langle S_3, E_1\rangle & \ldots & \langle S_n, E_1\rangle \\ 0 & \langle S_2, E_2\rangle & \langle S_3, E_2\rangle & \ldots & \langle S_n, E_2\rangle \\ 0 & 0 & \langle S_3, E_3\rangle & \ldots & \langle S_n, E_3\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \langle S_n, E_r\rangle \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Dokazat ćemo samo slučaj kada je A kvadratna matrica punog ranga. Tada od stupaca $\{S_1, \ldots, S_n\}$ primjenom Gram–Schmidtovog postupka dobijemo stupce $\{E_1, \ldots, E_n\}$ i od njih napravimo kvadratne matrice Q i R kako je opisano u algoritmu. S a_{ik} ćemo označiti i–tu koordinatu stupca S_k, a s e_{ik} i–tu koordinatu stupca E_k. Provjerimo da je $A = QR$:

$$(QR)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} Q_{ik}R_{kj} = \sum_{k=1}^{j} e_{ik}\langle S_j, E_k\rangle$$

što je i–ta koordinata vektora S_j. Zaista

$$S_j = \sum_{k=1}^{n} \langle S_j, E_k \rangle E_k = \sum_{k=1}^{j} \langle S_j, E_k \rangle E_k \text{ (jer je po GS teoremu } S_j \in [\{E_1, \ldots, E_j\}])$$

pa je njegova i–ta komponenta jednaka

$$\sum_{k=1}^{j} e_{ik} \langle S_j, E_k \rangle.$$

Pokazali smo da je $(QR)_{ij} = a_{ij}$, tj. stupci matrice QR su $\{S_1, \ldots, S_n\}$ pa je $QR = A$. □

Primjer 6.19 (A ima puni rang). Nađite QR dekompoziciju matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Rješenje Gram–Schmidt za stupce S_1, S_2, S_3 daje

$$E_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Stoga je

$$Q = [E_1\ E_2\ E_3] = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \langle S_1, E_1 \rangle & \langle S_2, E_1 \rangle & \langle S_3, E_1 \rangle \\ 0 & \langle S_2, E_2 \rangle & \langle S_3, E_2 \rangle \\ 0 & 0 & \langle S_3, E_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{30}} & \frac{22}{\sqrt{30}} \\ 0 & 0 & \frac{16}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

DZ 6.2. Provjeriti da je doista $A = QR$.

Primjer 6.20 (A nema puni rang). Zadana je matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Nađite QR dekompoziciju matrice A.

(b) Riješite sustav $Ax = b$, gdje je $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Rješenje

(a) Uočimo da je $S_2 = -S_1$ pa ćemo vektor S_2 izbaciti. Gram–Schmidtov postupak primijenjen na vektore S_1 i S_3 daje

$$E_1 = \frac{S_1}{\|S_1\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = S_3 - \langle S_3, E_1 \rangle E_1 = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \frac{B_2}{\|B_2\|} = B_2.$$

Dakle,

$$Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \langle S_1, E_1\rangle & \langle S_2, E_1\rangle & \langle S_3, E_1\rangle \\ 0 & \langle S_2, E_2\rangle & \langle S_3, E_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Sustav $Ax = b$ možemo zapisati kao $QRx = b$ pa je

$$Rx = Q^T b = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dobivamo gornjetrokutasti sustav

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = 1 \end{cases}$$

čije rješenje je $x = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. To je ujedno i rješenje početnog sustava $Ax = b$.

DZ 6.3. Direktno riješite sustav $Ax = b$ i provjerite da je to rješenje.

□

DZ 6.4. Nađite QR faktorizaciju matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

6.4 Ortogonalni komplement

Definicija 6.21. Neka je U konačnodimenzionalan unitaran prostor i M, N neki njegovi podskupovi. Kažemo da su skupovi M i N ortogonalni, i pišemo $M \perp N$, ako je $\langle a, b\rangle = 0$, za sve $a \in M$, $b \in N$.

Definicija 6.22. Neka su L i M potprostori unitarnog prostora U. Suma potprostora L i M, $L + M$, je ortogonalna ako je $L \perp M$. Pišemo $L \oplus M$.

Definicija 6.23. Neka je U unitaran prostor i $\emptyset \neq S \subseteq U$. **Ortogonalni komplement** skupa S je skup

$$S^\perp = \{x \in U : \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in S\}.$$

Činjenice 6.24.

1. Sigurno je $\langle 0, x\rangle = 0$, za sve $x \in S$, pa je $0 \in S^\perp$. Specijalno je $S^\perp \neq \emptyset$.
2. $U^\perp = \{0\}$.
3. $\{0\}^\perp = U$.
4. $S^\perp \leq U$, za svaki $S \subseteq U$.
5. $S^\perp = [S]^\perp$.

6. $\dim S^{\perp} = \dim U - \dim[S]$.

7. Neka je L bilo koji potprostor konačnodimenzionalnog unitarnog prostora U. Tada je $U = L \dot{+} L^{\perp}$, tj. U se može prikazati kao direktna suma potprostora L i njegovog ortogonalnog komplementa.

8. Za razliku od direktnog komplementa, ortogonalni komplement je jedinstven.

9. Za svaki $x \in U$ postoje jedinstveni $a \in L$ i $b \in L^{\perp}$ takvi da je $x = a + b$ (još vrijedi da je $\langle a, b\rangle = 0$).

10. Neka je M potprostor konačnodimenzionalnog unitarnog prostora U. Tada vrijedi $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = M$.

Zadatak 6.18. U prostoru $\mathbb{R}^5$ potprostor M razapet je vektorima $a = (1, 2, 3, -1, 2)$ i $b = (2, 4, 7, 2, -1)$. Odredite $M^{\perp}$.

Rješenje <u>Prvi način:</u> Skup $\{a, b\}$ je sustav izvodnica za M. Zato je $M = [\{a, b\}]$. Slijedi da je $x \in M^{\perp}$ ako i samo ako je $\langle x, a\rangle = 0$ i $\langle x, b\rangle = 0$. Dakle, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in M^{\perp}$ ako i samo ako je

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}.$$

Ovo je homogen sustav i skup svih njegovih rješenja je $M^{\perp}$. Rješenja su

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = r\underbrace{(-2, 1, 0, 0, 0)}_{=:u} + s\underbrace{(13, 0, -4, 1, 0)}_{=:v} + t\underbrace{(-17, 0, 5, 0, 1)}_{=:w}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Prema tome je $M^{\perp} = [\{u, v, w\}]$ i baza za $M^{\perp}$ je $\{u, v, w\}$.
<u>Drugi način:</u> Nadopunimo linearno nezavisni skup $\{a, b\}$ do baze za $\mathbb{R}^5$. Uzmemo li npr.

$$c = (1, 0, 0, 0, 0),\ d = (0, 1, 0, 0, 0),\ e = (0, 0, 1, 0, 0)$$

tada će skup $\{a, b, c, d, e\}$ biti baza za $\mathbb{R}^5$. Ortonormiramo li tu bazu po GS postupku, dobit ćemo ortonormiranu bazu $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ za $\mathbb{R}^5$ za koju vrijedi $[\{a, b\}] = [\{e_1, e_2\}]$. Stoga je $M = [\{e_1, e_2\}$ pa je $M^{\perp} = \{e_3, e_4, e_5\}$. Postupak ortogonalizacije baze $\{a, b, c, d, e\}$ ostavljamo za zadaću.

Zadatak 6.19. U unitarnom prostoru $M_3(\mathbb{R})$ sa standardnim skalarnim produktom dan je potprostor $M = \{X \in M_3(\mathbb{R}) : XA = X\}$, pri čemu je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite $M^{\perp}$.

Rješenje Odredimo najprije bazu za potprostor M. Uočimo da je $X \in M$ ako i samo ako je $X(A - I) = 0$. Neka je

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in M.$$

Tada mora vrijediti

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

odnosno $b+c=0$, $e+f=0$, $h+i=0$. Stoga je $X \in M$ ako i samo ako vrijedi $c=-b, f=-e, i=-h$, odnosno ako i samo ako je X oblika

$$\begin{bmatrix} a & b & -b \\ d & e & -e \\ g & h & -h \end{bmatrix}.$$

Stoga je jedna baza za M dana sa

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Označimo te matrice redom s $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$. Vrijedi $Y \in M^\perp$ ako i samo ako je vektor Y okomit ne sve vektore baze za M. Dakle,

$$Y = \begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ o & p & q \end{bmatrix} \in M^\perp$$

ako i samo ako je $\langle Y, B_i \rangle = 0$ za sve $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$, odnosno ako i samo ako je

$$x=0,\ y-z=0,\ u=0,\ v-w=0,\ o=0,\ p-q=0.$$

Dakle, $M^\perp = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & y & y \\ 0 & v & v \\ 0 & p & p \end{bmatrix} \mid y, v, p \in \mathbb{R} \right\}$ □

Zadatak 6.20. Neka je $P = \{p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : p(x) = p(-x)\}$ i $N = \{p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : p(x) = -p(-x)\}$. Pokažite da su P i N jedan drugome ortogonalni komplementi, pri čemu prostor $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ promatramo s obzirom na skalarni produkt $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$.

Rješenje Ako su $p \in P$ i $q \in N$ proizvoljno odabrani, tada je p parna i q neparna funkcija pa je pq neparna funkcija i zato je $\langle p, q \rangle = 0$. Time smo dokazali da je $P \perp N$. Nadalje, za svaki polinom $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ vrijedi $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$, gdje je

$$p_1(x) = \frac{p(x)+p(-x)}{2},\ p_2(x) = \frac{p(x)-p(-x)}{2}.$$

Uočimo da je $p_1 \in P$, $p_2 \in N$. Stoga je $P \dot{+} N = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, odnosno $P \oplus N = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Zbog jedinstvenosti ortogonalnog komplementa zaključujemo da je $P^\perp = N$ i $N^\perp = P$. □

Zadatak 6.21. U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$ (sa standardnim skalarnim produktom) zadan je vektor $x = (1,1,2,2)$ i potprostor M svojom bazom $a = (1,1,1,0)$ i $b = (1,0,1,1)$. Prikažite vektor x u obliku $x = y + z$, gdje je $y \in M$ i $z \in M^\perp$.

Rješenje Naivno rješenje bi bilo da odredimo bazu $\{u, v\}$ za $M^\perp$ pa x prikažemo kao $x = \alpha a + \beta b + \gamma u + \delta v$. Koeficijenti u tom prikazu su jedinstveni, a vektori koji nama trebaju su $y = \alpha a + \beta b$ i $z = \gamma u + \delta v$.

No, postoji puno jednostavniji i brži način. Ako ortonormiramo $\{a, b\}$, dobit ćemo $\{e_1, e_2\}$. Nadopunimo taj skup do ONB $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ za $\mathbb{R}^4$. Tada se x može prikazati kao

$$x = \underbrace{\langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, e_2 \rangle e_2}_{=y} + \underbrace{\langle x, e_3 \rangle e_3 + \langle x, e_4 \rangle e_4}_{=z}.$$

Da bismo odredili y i z, dovoljno je odrediti samo y (jer je $z = x - y$) pa nam ne trebaju vektori e_3, e_4, već samo e_1, e_2.
Ortonormirajmo $\{a, b\}$.

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{a}{\|a\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0)\\
b_2 &= b - \langle b, e_1\rangle e_1 = (1,0,1,1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)\\
e_2 &= \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{3}{\sqrt{15}}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{15}}(1,-2,1,3).
\end{aligned}$$

Sada je

$$y = \langle x, e_1\rangle e_1 + \langle x, e_2\rangle e_2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0) + \frac{7}{\sqrt{15}} \cdot \frac{1}{\sqrt{15}}(1,-2,1,3) = \frac{1}{5}\,(9,2,9,7)$$

pa je

$$z = x - y = \frac{1}{5}\,(-4,3,1,3)\,.$$

Zadatak 6.22. Neka je $A, B \in M_{mn}(\mathbb{R})$. Što možemo reći o međusobnom odnosu redaka/stupaca ovih matrica ako vrijedi

a) $AB^T = I$

b) $A^T B = I$

c) $AA^T = I$

d) $A^T A = I$

Rješenje

a) Ako je $AB^T = I$, onda je $(AB^T)_{ij} = \delta_{ij}$, odnosno

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{jk} = \delta_{ij},$$

odnosno skalarni umnožak i-tog retka matrice A i j-tog retka matrice B je $\delta_{ij},\ \ i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Posebno, i-ti redak od A je ortogonalan na sve retke od B osim i-tog.

b) Ako je $A^T B = I$, onda je $A^T(B^T)^T = I$ pa iz a) dijela zadatka zaključujemo da je skalarni umnožak i-tog retka matrice A^T i j-tog retka matrice B^T jednak δ_{ij}, odnosno skalarni umnožak i-tog stupca matrice A i j-tog stupca matrice B je $\delta_{ij},\ \ i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Posebno, i-ti stupac od A je ortogonalan na sve stupce od B osim i-tog.

c) Ovo je poseban slučaj a) dijela zadatka za $B = A$. Zaključujemo da je skalarni umnožak i-tog i j-tog retka matrice A jednak $\delta_{ij},\ \ i, j \in \{1, \ldots, m\}$, odnosno, retci matrice A čine ortonormirani skup.

d) Ovo je poseban slučaj b) dijela zadatka za $B = A$. Zaključujemo da je skalarni umnožak i-tog i j-tog stupca matrice A jednak $\delta_{ij},\ \ i, j \in \{1, \ldots, n\}$, odnosno, stupci matrice A čine ortonormirani skup.

ZADATAK 6.23. Odredite $a, b, c \in \mathbb{R}$ tako da matrica $Q \in M_3(\mathbb{R})$ bude ortogonalna:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & a \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & b \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & c \end{pmatrix}$$

RJEŠENJE Uočimo da prva dva stupca matrice Q čine ortonormirani skup. Da bi ova matrica bila ortogonalna, nužno je (vidi prethodni zadatak) da stupci matrice Q budu ortonormirani. Dakle, tražimo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ takve da je

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{\sqrt{2}}{2}c = 0,\ \frac{\sqrt{3}}{3}a + \frac{\sqrt{3}}{3}b + \frac{\sqrt{3}}{3}c = 0,$$

odnosno $a^2 + b^2 + c^2 = 1,\ a = c,\ a + b + c = 0$. Rješenja ovog sustava su

$$(a, b, c) = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}(1, -2, 1).$$

Za oba ova rješenja stupci matrice Q su ortonormirani, odnosno vrijedi $Q^T Q = I$. Matrica Q^T je lijevi inverz matrice Q, a pošto je Q regularna, to je i desni inverz matrice Q, odnosno vrijedi $QQ^T = I$, tj. Q je ortogonalna matrica. Uočite da ortonormiranost stupaca regularne matrice povlači ortonormiranost redaka te iste matrice. □

ZADATAK 6.24. Neka su L, M potprostori od U. Dokažite da je:

(a) $(L + M)^\perp = L^\perp \cap M^\perp$,

(b) $(L \cap M)^\perp = L^\perp + M^\perp$.

RJEŠENJE

(a) Dokazujemo dvije inkluzije.

$\boxed{\subseteq}$ Neka je $x \in (L + M)^\perp$. Tada je $x \perp L + M \supseteq L, M$ pa je i $x \in L^\perp$ i $x \in M^\perp$. Dakle, $x \in L^\perp \cap M^\perp$.

$\boxed{\supseteq}$ Ako je $x \in L^\perp \cap M^\perp$, onda je $x \perp L$ i $x \perp M$. Za proizvoljan $y = a + b \in L + M$ je

$$\langle x, y\rangle = \langle x, a + b\rangle = \langle x, a\rangle + \langle x, b\rangle = 0 + 0 = 0.$$

Dakle, $x \in (L + M)^\perp$

(b) Stavimo u (a) $L^\perp$ umjesto L i $M^\perp$ umjesto M. Imamo:

$$\left(L^\perp + M^\perp\right)^\perp = \left(L^\perp\right)^\perp \cap \left(M^\perp\right)^\perp = L \cap M.$$

Uzimanjem ortogonalnog komplementa lijeve i desne strane, dobivamo

$$(L \cap M)^\perp = \left(\left(L^\perp + M^\perp\right)^\perp\right)^\perp = L^\perp + M^\perp.$$

□

DZ 6.5. Nađite ortogonalni komplement u $\mathbb{R}^3$ potprostora $[\{(1, 0, 1), (1, 2, -2)\}]$.

6.5 Najbolja aproksimacija

PRIMJER 6.25. Želimo naći udaljenost točke T od ravnine π.
Znamo da se najmanja udaljenost postiže za točku T' koja je ortogonalna projekcija točke T na ravninu π.

Ovaj motivirajući primjer nas vodi na općenitiji problem: neka je U konačnodimenzionalan unitaran prostor, $M \leq U$ i $x \in U$. Trebamo pronaći vektor $a \in M$ takav da je

$$\|x-a\| \leq \|x-y\|, \quad \forall y \in M.$$

Broj $\min_{y\in M}\|x-y\|$ zovemo **udaljenost vektora** x **od potprostora** M, a vektor a zovemo **najbolja aproksimacija vektora** x vektorima iz M.
Rješenje problema: vektor a možemo dobiti kao $a = P_M x$, gdje je P_M ortogonalni projektor na potprostor M, tj. možemo pisati $x = a + b$, za $a \in M$, $b \in M^\perp$ i a je tražena najbolja aproksimacija vektora x.
Kako pronaći a? Nađemo ONB $\{e_1, \ldots, e_k\}$ za M. Tada je

$$a = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i\rangle e_i. \tag{6.5}$$

Naime, ako tu ONB proširimo do ONB $\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ za cijeli prostor U, onda x možemo zapisati kao

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i\rangle e_i}_{\in M} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i}_{\in M^\perp} = a + b.$$

Zbog jedinstvenosti prikaza $x = a + b$ slijedi formula (6.5) za a.

ZADATAK 6.25. Neka je $M = [\{(1,1,0,0),(0,1,1,0)\}]$ potprostor unitarnog prostora $\mathbb{R}^4$ sa standardnim skalarnim produktom. Odredite najbolju aproksimaciju vektora $x = (2,0,0,7)$ vektorima iz M. Kolika je udaljenost vektora x od potprostora M?

RJEŠENJE Stavimo $a_1 = (1,1,0,0)$, $a_2 = (0,1,1,0)$ i ortonormirajmo skup $\{a_1, a_2\}$. Dobivamo vektore

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0), \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2,0).$$

Odredimo a, gdje je $x = a + b$, $a \in M$, $b \in M^\perp$:

$$a = \langle x, u_1\rangle u_1 + \langle x, u_2\rangle u_2 = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right).$$

Također je

$$\|x-a\| = \|b\| = \left\|(2,0,0,7) - \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 7^2} = \frac{\sqrt{453}}{3}.$$

ZADATAK 6.26. Odredite $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ takav da je $p(0) = p'(0) = 0$ i da je vrijednost

$$\int_0^1 (x^2 + 1 - p(x))^2 dx$$

najmanja moguća.

RJEŠENJE Neka je $M = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(0) = p'(0) = 0\}$. Tada je $M \leq \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Označimo $p_0(x) = x^2 + 1$. Prostor $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ promatramo uz skalarni produkt $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$.
Sada zadatak možemo reformulirati: odredite $p \in M$ takav da je

$$\|p_0 - p\| \leq \|p_0 - q\|, \quad \forall q \in M.$$

Dakle, tražimo najbolju aproksimaciju vektora p_0 vektorima iz M. Uočimo da je $M = \{p(x) = ax^3 + bx^2 \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$, odnosno $M = [\{x^3, x^2\}]$. Stavimo $p_1(x) = x^3$, $p_2(x) = x^2$. Primjenom G-S postupka na vektore p_1 i p_2 dobijemo vektore

$$e_1(x) = \sqrt{7}x^3,\ e_2(x) = 6\sqrt{5}\left(x^2 - \frac{7}{6}x^3\right).$$

Najbolja aproksimacija je dana s $p_M = \langle p_0, e_1\rangle e_1 + \langle p_0, e_2\rangle e_2$ (dovršite za DZ). □

6.6 Metoda najmanjih kvadrata

Dobiveno je n mjerenja i njima odgovara n točaka $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ u ravnini. Ideja: pronaći pravac koji „najbolje aproksimira" ta mjerenja. Neka taj pravac ima jednadžbu $y = kx + l$.
Imamo sustav

$$\begin{aligned} ka_1 + l &= b_1 \\ ka_2 + l &= b_2 \\ &\vdots \\ ka_n + l &= b_n, \end{aligned}$$

tj. sustav $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

koji je najvjerojatnije nekonzistentan. No, mi svejedno želimo odrediti onaj $x_0 = (k_0, l_0)$ koji „najbolje aproksimira" taj sustav, tj. onaj $x_0 = (k_0, l_0)$ koji zadovoljava

$$||Ax_0 - b|| \leq ||Ax - b|| \quad \forall x \in M_{21}(\mathbb{R}).$$

Uvedemo li oznaku $M = \{Ax \,|\, x \in M_{21}(\mathbb{R})\}$, vidimo da je $M \leq M_{n1}(\mathbb{R})$. Označimo s $d(b, M)$ udaljenost vektora b od potprostora M. Tada vrijedi

$$d(b, M) = \min_{y \in M} ||b - y|| = \min_{y \in M} ||y - b||.$$

Označimo s $y_0 \in M$ vektor za kojeg je $d(b, M) = ||y_0 - b||$. Tada je y_0 ortogonalna projekcija vektora b na potprostor M. Pošto je $y_0 \in M$, postoji vektor $x_0 = (k_0, l_0)$, takav da je $Ax_0 = y_0$. Tada za taj $x_0 = (k_0, l_0)$ vrijedi

$$||Ax_0 - b|| \leq ||Ax - b|| \quad \forall x \in M_{21}(\mathbb{R}),$$

odnosno vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n}(a_ik_0+l_0-b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(a_ik+l-b_i)^2, \quad \forall k,l \in \mathbb{R}.$$

Zato kažemo da je x_0 rješenje sustava $Ax=b$ u smislu najmanjih kvadrata. Jasno, ako je x_0 rješenje u smislu najmanjih kvadrata, onda je Ax_0 zapravo ortogonalna projekcija vektora b na M.
Sad ćemo dati jednu elegantnu metodu rješavanja sustava $Ax=b$ u smislu najmanjih kvadrata.

Propozicija 6.26. *Neka je dan sustav $Ax=b$, gdje je*

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{bmatrix}, \quad b \in M_{n1}(\mathbb{R}),$$

takav da je $r(A)=2$. Tada vrijedi:

a) Sustav $A^TAx=A^Tb$ ima jedinstveno rješenje.

b) Vektor x_0 je rješenje sustava $A^TAx=A^Tb$ ako i samo ako je x_0 rješenje sustava $Ax=b$ u smislu najmanjih kvadrata.

Dokaz. a) Uočimo da je sustav $A^TAx=A^Tb$ zapravo 2×2 Cramerov sustav. Naime, matrica sustava je regularna jer je

$$A^TA=\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum a_i^2 & \sum a_i \\ \sum a_i & n \end{pmatrix}$$

pa je

$$\det\left(A^TA\right)=n\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2,$$

što je jednako nuli ako i samo ako je $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=n\sum_{i=1}^{n}a_i^2$, a to vrijedi ako i samo ako je

$$\langle \mathbf{a},\mathbf{1}\rangle^2=\|\mathbf{1}\|^2\|\mathbf{a}\|^2,$$

gdje je $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)$, $\mathbf{1}=(1,\ldots,1)$. Iz CSB nejednakosti znamo da jednakost vrijedi ako i samo ako je $\mathbf{a}=\alpha\mathbf{1}$ za neki $\alpha\in\mathbb{R}$. Ovo nije moguće jer je $r(A)=2$. Dakle, A^TA je regularna pa je (jedinstveno) rješenje sustava $A^TAx=A^Tb$ dano s $x_0=\left(A^TA\right)^{-1}A^Tb$.

b) Vektor x_0 je rješenje jednadžbe $Ax=b$ u smislu najmanjih kvadrata ako i samo ako je Ax_0 ortogonalna projekcija vektora b na potprostor

$$M=\{Ax : x\in M_{21}(\mathbb{R})\}=\left\{x_1\cdot\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}+x_2\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} : x_1,x_2\in\mathbb{R}\right\}.$$

Vektor b se može na jedinstven način zapisati kao $b = c + d$, gdje je $c \in M$, $d \in M^{\perp}$. Dakle, Ax_0 je ortogonalna projekcija vektora b na potprostor M ako i samo ako je $c = Ax_0$, što je ekvivalentno tome da je $d = b - Ax_0$, a to vrijedi ako i samo ako je $b - Ax_0 \in M^{\perp}$, odnosno ako i samo ako je

$$
\begin{aligned}
&\left\langle Ax_0 - b, \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \quad \text{i} \quad \left\langle Ax_0 - b, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\
\iff & \sum_{i=1}^{n} (Ax_0 - b)_i a_i = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{n} (Ax_0 - b)_i = 0 \\
\iff & \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (Ax_0 - b)_1 \\ (Ax_0 - b)_2 \\ \vdots \\ (Ax_0 - b)_n \end{bmatrix} = 0 \\
\iff & A^T \cdot (Ax_0 - b) = 0 \\
\iff & A^T A x_0 = A^T b.
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 6.27. Metodom najmanjih kvadrata odredite pravac koji najbolje aproksimira točke $(-6, -1)$, $(-2, 2)$, $(1, 1)$, $(7, 6)$.

Rješenje Pravac koji tražimo ima oblik $y = kx + l$ pa dobivamo sustav

$$
\begin{aligned}
-6k + l &= -1 \\
-2k + l &= 2 \\
k + l &= 1 \\
7k + l &= 6
\end{aligned}
$$

koji možemo matrično zapisati kao $Ax = b$, gdje je

$$
A = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.
$$

Sustav nema rješenje pa minimiziramo $\|Ax - b\|$, a rekli smo da je za to dovoljno riješiti sustav $A^T A x = A^T b$. Imamo

$$
A^T A = \begin{bmatrix} 90 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^T b = \begin{bmatrix} 45 \\ 8 \end{bmatrix}
$$

pa je sustav $A^T A x = A^T b$ dan kao

$$
\begin{bmatrix} 90 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 8 \end{bmatrix}
$$

Rješenje tog sustava je $k = \frac{1}{2}$, $l = 2$ pa je traženi pravac $y = \frac{1}{2}x + 2$. □

6.7 Operatori na unitarnim prostorima

Neka je U konačnodimenzionalan unitaran prostor. Primijetimo na početku da je za svaki $a \in U$, $f_a : U \to \mathbb{F}$ definiran s $f_a(x) = \langle x, a \rangle$, linearni funkcional na U. Zapravo su to svi linearni funkcionali na U.

Teorem 6.27 (Rieszov teorem o reprezentaciji funkcionala). *Neka je U konačnodimenzionalan unitaran prostor i f linearan funkcional na U. Tada postoji jedinstven vektor $a \in U$ takav da je*

$$f(x) = \langle x, a \rangle, \quad x \in U.$$

Zadatak 6.28. Zadan je unitaran prostor $\mathbb{R}^3$ sa skalarnim produktom

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3.$$

Za funkcional $f(x, y, z) = x - 2y + 4z$ odredite $a \in \mathbb{R}^3$ takav da je $f(x) = \langle x, a \rangle$, za sve $x \in \mathbb{R}^3$.
Rješenje Neka je $a = (a_1, a_2, a_3)$ i neka je $\{e_1, e_2, e_3\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^3$. Imamo

$$\begin{aligned} 1 &= f(e_1) = \langle e_1, a \rangle = 2a_1 \\ -2 &= f(e_2) = \langle e_2, a \rangle = 3a_2 \\ 4 &= f(e_3) = \langle e_3, a \rangle = a_3 \end{aligned}$$

pa je $a = \left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, 4\right)$.

Zadatak 6.29. U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_2$ sa skalarnim produktom

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\mathrm{d}t$$

zadan je funkcional $f(p) = \dfrac{p(0) + p'(0)}{2}$. Odredite $r \in \mathcal{P}_2$ takav da je $f(p) = \langle p, r \rangle$, za sve $p \in \mathcal{P}_2$.
Rješenje Neka je $r(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ i uzmimo $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$, $p_2(t) = t^2$, kanonsku bazu za $\mathcal{P}_2$. Imamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= f(p_0) = \langle p_0, r \rangle = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 \\ \frac{1}{2} &= f(p_1) = \langle p_1, r \rangle = \frac{2}{3}a_1 \\ 0 &= f(p_2) = \langle p_2, r \rangle = \frac{2}{3}a_0 + \frac{2}{5}a_2. \end{aligned}$$

Rješavanjem sustava dobijemo $r(t) = \dfrac{9}{16} + \dfrac{3}{4}t - \dfrac{15}{16}t^2$.

Teorem 6.28. *Neka je U konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(U)$. Postoji jedinstven operator $A^* \in L(U)$ takav da je*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle, \quad \forall x, y \in U.$$

Kažemo da je operator A^* ***hermitski adjungiran*** *operatoru A.*

Napomena 6.29. Matrica operatora A^* u ONB (e) je hermitski adjungirana matrici $A(e)$, tj.

$$A^*(e) = A(e)^*.$$

ZADATAK 6.30. Zadan je linearni operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ s

$$A(x, y, z) = (x + y, y, x + y + z).$$

Odredite A^*.

RJEŠENJE Vrijedi da je $\langle Av, w\rangle = \langle v, A^*w\rangle$, za sve $v = (x, y, z), w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Tada je

$$\begin{aligned}\langle A(x, y, z), (a, b, c)\rangle &= \langle (x + y, y, x + y + z), (a, b, c)\rangle = a(x + y) + by + c(x + y + z) \\ &= x(a + c) + y(a + b + c) + zc = \langle (x, y, z), (a + c, a + b + c, c)\rangle\end{aligned}$$

pa je $A^*(a, b, c) = (a + c, a + b + c, c)$. □

RJEŠENJE (drugi način) Prikažimo operator A matrično u kanonskoj bazi (e) za $\mathbb{R}^3$:

$$A(e) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Slijedi da je

$$A^*(e) = A(e)^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Za $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ je

$$(A^*v)(e) = A^*(e)v(e) = \begin{pmatrix} x + z \\ x + y + z \\ z \end{pmatrix}$$

pa je $A^*(x, y, z) = (x + z, x + y + z, z)$. □

ZADATAK 6.31. Neka su $A, B \in M_n$, te $T \in L(M_n)$ linearni operator zadani s $T(X) = AX - XB$. Izračunajte T^*.

RJEŠENJE Za sve $X, Y \in M_n$ vrijedi

$$\begin{aligned}\langle T(X), Y\rangle &= \langle AX - XB, Y\rangle = \mathrm{tr}((AX - XB)Y^*) = \mathrm{tr}(AXY^* - XBY^*) \\ &= \mathrm{tr}(A(XY^*)) - \mathrm{tr}(XBY^*) = \mathrm{tr}((XY^*)A) - \mathrm{tr}(XBY^*) \\ &= \mathrm{tr}(X(A^*Y)^* - X(YB^*)^*) = \mathrm{tr}(X(A^*Y - YB^*)^*) = \langle X, A^*Y - YB^*\rangle.\end{aligned}$$

Zato je $T^*(Y) = A^*Y - YB^*$.
Koristili smo linearnost preslikavanja tr i tvrdnju $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$ za sve $X, Y \in M_n$. □

ZADATAK 6.32. Neka su $A, B \in M_n$, te $T \in L(M_n)$ linearni operator zadani s $T(X) = AXB$. Izračunajte T^*.

RJEŠENJE Ovo možemo riješiti direktnim računom kao u prethodnom zadatku, ili koristeći prethodni zadatak. Mi ćemo zadatak riješiti koristeći prethodni zadatak.
Definiramo operatore $L, R \in L(M_n)$, $L(X) = AX = AX - X \cdot 0$ i $R(X) = XB = 0 \cdot X - X(-B)$. Iz prethodnog zadatka slijedi da je $L^*(X) = A^*X$ i $R^*X = XB^*$.
Sada je $T = LR$ i zato $T^* = R^*L^*$, odnosno, $T^*(X) = R^*(L^*(X)) = A^*XB^*$. □

ZADATAK 6.33. Neka je U unitaran prostor, te $x, y \in U$. Zadano je preslikavanje $f_{x,y} : U \to U$ s $f_{x,y}(z) = \langle z, y\rangle x$.

(a) Dokažite da je $f_{x,y}$ linearan operator.

(b) Dokažite da je $f_{x,y} \circ f_{y,z} = \|y\|^2 f_{x,z}$.

(c) Odredite $(f_{x,y})^*$.

RJEŠENJE

(a) Za $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i $z, w \in U$ vrijedi

$$f_{x,y}(\alpha z + \beta w) = \langle \alpha z + \beta w, y \rangle x = \alpha \langle z, y \rangle x + \beta \langle w, y \rangle x = \alpha f_{x,y}(z) + \beta f_{x,y}(w).$$

(b) Za svaki $w \in U$ vrijedi

$$(f_{x,y} \circ f_{y,z})(w) = f_{x,y}(\langle w, z \rangle y) = \langle w, z \rangle f_{x,y}(y) = \langle w, z \rangle \langle y, y \rangle x = \|y\|^2 \langle w, z \rangle x = \|y\|^2 f_{x,z}(w).$$

(c) Za svaki $z, w \in U$ imamo

$$\langle f_{x,y}(z), w \rangle = \langle \langle z, y \rangle x, w \rangle = \langle z, y \rangle \langle x, w \rangle = \left\langle z, \overline{\langle x, w \rangle} y \right\rangle = \langle z, \langle w, x \rangle y \rangle = \langle z, f_{y,x}(w) \rangle.$$

Dobili smo da je $f_{x,y}^* = f_{y,x}$.

ZADATAK 6.34. Neka je $\mathcal{P}_1$ realan prostor svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog 1 sa skalarnim produktom

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad p, q \in \mathcal{P}_1$$

Neka je $A : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1$ linearan operator zadan s

$$Ap(t) = 2p(t) - p'(t), \quad p \in \mathcal{P}_1$$

Odredite matricu hermitski adjungiranog operatora operatoru A u bazi $\{1, t\}$.

RJEŠENJE Označimo $f_1(t) = 1, f_2(t) = t$. Ortonormiranjem baze $(f) = (f_1, f_2)$ po G-S postupku dobivamo

$$e_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ e_2(t) = \sqrt{2}\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

Uvedimo oznaku $(e) = \{e_1, e_2\}$. Imamo

$$A(e) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Kako je baza (e) ortonormirana, to je

$$A^*(e) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sada je $A^*(f) = I(f,e)A^*(e)I(e,f) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$

DEFINICIJA 6.30. Operator $A \in L(U)$ je **hermitski** (**antihermitski**) ako je $A^* = A$ ($A^* = -A$).

ZADATAK 6.35. Navedite nekoliko hermitskih i nekoliko antihermitskih operatora na unitarnom prostoru.

RJEŠENJE Identiteta i nuloperator su hermitski operatori.
Neka je $A \in L(U)$ proizvoljno odabran. Tada su A^*A i $\frac{1}{2}(A + A^*)$ hermitski operatori, dok je $\frac{1}{2}(A - A^*) \in L(U)$ antihermitski operator.

Svaki $A \in L(U)$ se na jedinstven način može prikazati kao zbroj jednog hermitskog i jednog antihermitskog operatora na sljedeći način:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*).$$

ZADATAK 6.36. Neka je $A \in M_n$. Zapišite linearne operatore $L, R \in L(M_n)$, $L(X) = AX$ i $R(X) = XB$ kao zbroj jednog hermitskog i jednog antihermitskog operatora.

RJEŠENJE Iz rješenja zadatka 6.32 znamo da je $L^*(X) = A^*X$ i $R^*X = XB^*$. Stoga je $L(X) = L_1(X) + L_2(X)$, $R(X) = R_1(X) + R_2(X)$, gdje je

$$\begin{aligned} L_1(X) &= \frac{1}{2}(L + L^*)(X) = \frac{1}{2}(AX + A^*X), \\ L_2(X) &= \frac{1}{2}(L - L^*)(X) = \frac{1}{2}(AX - A^*X), \\ R_1(X) &= \frac{1}{2}(R + R^*)(X) = \frac{1}{2}(XB + XB^*), \\ R_2(X) &= \frac{1}{2}(R - R^*)(X) = \frac{1}{2}(XB - XB^*). \end{aligned}$$

Iz rješenja prethodnog zadatka slijedi da su L_1, R_1 hermitski, a L_2, R_2 antihermitski operatori. □

ZADATAK 6.37. Neka je A antihermitski operator na *realnom* unitarnom prostoru U. Dokažite da je za svako $x \in U$, $\langle Ax, x\rangle = 0$.

RJEŠENJE Kako je A antihermitski, onda za svaki $x, y \in U$ imamo

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = -\langle x, Ay\rangle$$

pa je posebno

$$\langle Ax, x\rangle = -\langle x, Ax\rangle = -\langle Ax, x\rangle$$

jer smo na realnom prostoru. Dakle, $\langle Ax, x\rangle = 0$, za svaki $x \in U$. □

ZADATAK 6.38. Neka je A antihermitski operator na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru U. Dokažite da je $A \pm \varepsilon I$ regularan za bilo koji $\varepsilon > 0$.

RJEŠENJE Primijetimo da je

$$\|(A \pm \varepsilon I)x\|^2 = \langle (A \pm \varepsilon I)x, (A \pm \varepsilon I)x\rangle = \|Ax\|^2 \pm \cancel{\varepsilon\langle x, Ax\rangle} \pm \cancel{\varepsilon\langle Ax, x\rangle} + \varepsilon^2\|x\|^2 \geq \varepsilon^2\|x\|^2.$$

Slijedi da je $A \pm \varepsilon I$ injekcija (jer $(A \pm \varepsilon I)x = 0$ povlači da je $x = 0$) pa je $A \pm \varepsilon I$ regularan jer je U konačnodimenzionalan. □

ZADATAK 6.39. Neka je $A \in L(U)$ hermitski operator. Dokažite da je $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$, $\forall x \in U$.

RJEŠENJE Kako je A hermitski, onda za svaki $x, y \in U$ imamo

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

pa je posebno

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}.$$

Dakle, $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$, za svaki $x \in U$. □

DEFINICIJA 6.31. Neka je U unitaran prostor. Za $A \in L(U)$ kažemo da je **unitaran operator** ako vrijedi

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in U,$$

što je ekvivalentno $AA^* = A^*A = I$.

NAPOMENA 6.32. Neka je U konačnodimenzionalni unitarni prostor i $A \in L(U)$. Sljedeće tri tvrdnje su ekvivalentne:

1. A je unitaran operator.
2. Postoji ONB (e) takva da je $A(e)$ unitarna matrica.
3. Matrica $A(e)$ je unitarna u **svakoj** ONB (e).

PRIMJER 6.33. Ako je $B \in M_n(\mathbb{F})$ unitarna matrica i definiramo linearan operator $L_B : M_{n1}(\mathbb{F}) \to M_{n1}(\mathbb{F})$, $L_B x := B \cdot x$, onda je L_B unitaran operator.

PRIMJER 6.34. Neka je $R_\varphi \in L(\mathbb{R}^2)$ operator rotacije za kut φ u pozitivnom smjeru. Vrijedi da je R_φ unitaran operator. Obrazloženje: iz definicije (ali prvo napisati formulu), geometrijski, matrično.

ZADATAK 6.40. Matrica prijelaza iz jedne ONB u drugu ONB je unitarna.

RJEŠENJE Neka su (e) i (f) dvije ONB unitarnog prostora U. Tada je $I(e, f)$ matrica operatora S, $Se_i = f_i$, $i = 1, \ldots, n$, u bazi (e). Tvrdnja zadatka vrijedi jer je S unitaran operator.

ZADATAK 6.41. Neka je $S \in L(M_2)$ takav da je $\operatorname{Ker} S = \left\{ \begin{bmatrix} a+b & 2a \\ 2b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{F} \right\}$. Odredite $\operatorname{Im} S^*$.

RJEŠENJE Vrijedi $\operatorname{Ker} S \oplus \operatorname{Im} S^* = M_2$, odakle slijedi da je $\operatorname{Im} S^*$ ortogonalni komplement od $\operatorname{Ker} S$ u M_2. Lako vidimo da je

$$\left\{ F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

jedna baza za $\operatorname{Ker} S$. Zato je $\dim(\operatorname{Ker} S)^\perp = 2$, pa je dovoljno naći dva linearno nezavisna elementa iz M_2 koji su ortogonalni na F_1 i F_2. Na primjer, možemo uzeti

$$F_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Slijedi da je $\operatorname{Im} S^* = [\{F_3, F_4\}]$.

DZ 6.6. Na vektorskom prostoru $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ promatramo skalarni produkt $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$. Neka je $T \in L(\mathcal{P}_n(\mathbb{R}))$ zadan kao

$$T(p)(x) = ((1 - x^2)p'(x))'.$$

Dokažite da je $T = T^*$, to jest, da je T hermitski operator.

RJEŠENJE Direktnim računom, koristeći parcijalnu integraciju, dokažemo da je $\langle Tp, q \rangle = \langle p, Tq \rangle$ za sve $p, q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

ZADATAK 6.42. Neka je V kompleksni konačnodimenzionalni unitarni prostor, te $A, B \in L(V)$. Ako je A hermitski i B unitaran, dokažite da je $(A - iI)(B - 5I)$ invertibilan operator.

RJEŠENJE Prisjetimo se da je λ svojstvena vrijednost operatora $T \in L(V)$ ako i samo ako $T - \lambda I$ nije injektivan, odnosno, ako i samo ako $T - \lambda I$ nije invertibilan. To možemo iskazati i ovako: λ nije svojstvena vrijednost od T ako i samo ako je $T - \lambda I$ invertibilan operator.
Kako je A hermitski operator, sve njegove svojstvene vrijednosti su realne. Zato i nije svojstvena vrijednost od A, te je $A - iI$ invertibilan.

Operator B je unitaran, pa je $|\lambda| = 1$ za svaki $\lambda \in \sigma(B)$. Zato $5 \notin \sigma(B)$, pa je $B - 5I$ invertibilan. Produkt invertibilnih operatora je invertibilan, odakle slijedi tvrdnja.

6.8 Dijagonalizacija u ortonormiranoj bazi

U ovoj cjelini ćemo se baviti problemom dijagonalizacije operatora na unitarnim prostorima u ortonormiranoj bazi. Prvo trebamo diskutirati kakvi su to operatori koji se mogu dijagonalizirati u ONB.

Definicija 6.35. Neka je U unitaran prostor. Za operator $A \in L(U)$ kažemo da je **normalan operator** ako vrijedi $AA^* = A^*A$.

Primjer 6.36. Primjeri normalnih operatora:

- Hermitski operatori: Ako je $A^* = A$, tada je $AA^* = A^2 = A^*A$.
- Antihermitski operatori: Ako je $A^* = -A$, tada je $AA^* = -A^2 = A^*A$.
- Unitarni operatori: Ako je A unitaran operator, tada vrijedi $AA^* = I = A^*A$.

Primjer normalnog operatora koji nije niti u jednoj od ove tri grupe:
Definirajmo $A \in L(\mathbb{C}^2)$ s $A(x, y) = (ix, 5y)$.

Pojam normalnog operatora nam je bitan zbog sljedećeg teorema, koji precizno opisuje koji se operatori mogu dijagonalizirati u ONB:

Teorem 6.37. *Neka je U kompleksan unitaran prostor i $A \in L(U)$. Postoji ONB (e) takva da operator A u njoj ima dijagonalan matrični prikaz $A(e)$ ako i samo ako je A normalan operator.*

Naravno, postoji i analogna definicija za matrice:

Definicija 6.38. Za matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ kažemo da je **normalna matrica** ako vrijedi $AA^* = A^*A$.

Napomena 6.39. Neka je U konačnodimenzionalni kompleksni unitarni prostor i $A \in L(U)$. Sljedeće tri tvrdnje su ekvivalente:

1. A je normalan operator.
2. Postoji ONB (e) takva da je $A(e)$ normalna matrica.
3. Matrica $A(e)$ je normalna u **svakoj** ONB (e).

Za matrice prethodni teorem glasi ovako:

Teorem 6.40. *Za matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ postoji unitarna matrica $U \in M_n(\mathbb{C})$ takva da je UAU^* dijagonalna matrica ako i samo ako je A normalna matrica.*

Zadatak 6.43. Neka je $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -1 \\ 12 & -4 & -2 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Postoji li unitarna matrica $U \in M_3(\mathbb{C})$ takva da je UAU^* dijagonalna matrica?

RJEŠENJE Dovoljno je provjeriti je li A normalna matrica. Najprije,

$$A^* = A^T = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -6 \\ -3 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

pa je

$$AA^* = \begin{pmatrix} 74 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 244 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = A^*A.$$

Dakle, A nije normalna pa ne postoji unitarna matrica $U \in M_3(\mathbb{C})$ takva da je UAU^* dijagonalna matrica.

ZADATAK 6.44. Odredite ONB u kojoj se linearni operator $A \in L(\mathbb{C}^2)$ čiji je matrični prikaz u kanonskoj bazi dan sa $A(e) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ dijagonalizira.

RJEŠENJE Lako se vidi da je $A(e)$ unitarna matrica (pa je onda i normalna). Kako je (e) ONB, to znači da je A normalan operator pa će tražena ONB u kojoj se A dijagonalizira doista postojati. Odredimo svojstvene vrijednosti operatora A.

$$0 = k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{3}{5} - \lambda & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\lambda - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \lambda^2 - \frac{6}{5}\lambda + 1.$$

Dakle, $\lambda_{1,2} = \frac{3}{5} \pm i\frac{4}{5}$.
Odredimo sad $V_A(\lambda_1) = V_A\left(\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}\right)$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{5}i & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{4}{5}i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dakle, $x = t\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = tv_1$, $t \in \mathbb{C}$.
Odredimo $V_A(\lambda_2) = V_A\left(\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}\right)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5}i & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5}i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dakle, $x = t\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = tv_2$, $t \in \mathbb{C}$.

U bazi $(f) = \{v_1, v_2\}$ A se dijagonalizira, tj. ima matrični zapis $D = A(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
Baza (f) je ortogonalna, naime, $\langle v_1, v_2 \rangle = i \cdot \overline{-i} + 1 \cdot \overline{1} = 0$, ali nije ortonormirana jer

$$\|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1 \rangle = i \cdot \bar{i} + 1 \cdot \overline{1} = 2, \quad \|v_2\|^2 = \langle v_2, v_2 \rangle = -i \cdot \overline{-i} + 1 \cdot \overline{1} = 2.$$

Stavimo $\hat{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, $\hat{v}_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ pa je $\hat{f} = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2\}$ ONB. Operator A se u toj bazi dijagonalizira, tj. ako stavimo $U = I(e, \hat{f}) = \begin{pmatrix} \hat{v}_1 & \hat{v}_2 \end{pmatrix}$, onda je $A(e) = I(e, \hat{f})A(\hat{f})I(\hat{f}, e) = UDU^*$.

Općenito vrijedi sljedeći rezultat.

Propozicija 6.41. *Neka je $A \in L(U)$ normalan operator na konačnodimenzionalnom kompleksnom unitarnom prostoru U i neka su $x \in V_A(\lambda)$, $y \in V_A(\mu)$ nenul svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima λ, μ od A. Tada je $x \perp y$.*

Dokaz. Koristit ćemo nekoliko tvrdnji čiji dokaz ostavljamo za DZ.

DZ 6.7. Ako je A normalan, onda je $\|Ax\| = \|A^*x\|$ za sve $x \in U$.

DZ 6.8. Ako je A normalan, onda je $A - cI$ normalan za svaki $c \in \mathbb{C}$. Posebno, operatori $A - \lambda I$ i $A - \mu I$ su normalni.

DZ 6.9. Ako je A normalan i $Ax = \lambda x$, onda je $A^*x = \overline{\lambda}x$. Analogno za μ i y.

Sada imamo

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \langle x, \overline{\mu}y\rangle = \mu\langle x, y\rangle$$

pa je $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$. Kako je $\lambda \neq \mu$, mora biti $\langle x, y\rangle = 0$. $\square$

Zadatak 6.45. Odredite ONB u kojoj se linearni operator $A \in L(M_3)$ čiji je matrični prikaz u kanonskoj bazi dan s $A(e) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ dijagonalizira.

Rješenje Primijetimo da je $A(e)^* = A(e)^T = A(e)$, a (e) je ONB pa se A može dijagonalizirati u nekoj (drugoj) ONB. Odredimo najprije svojstvene vrijednosti od A:

$$0 = k_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$$

pa je $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 10$.

$$V_A(\lambda_1)\ldots \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dakle, $V_A(\lambda_1) = [\{v_1, v_2\}]$, gdje su $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$V_A(\lambda_2)\ldots \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & -5 & -4 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & -9 & -9 \\ 0 & 9 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dakle, $V_A(\lambda_2) = [\{v_3\}]$, gdje je $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Operator A se dijagonalizira u bazi $(f) = \{v_1, v_2, v_3\}$, ali to nije ONB. Uočimo da je $\langle v_1, v_3\rangle = 0$,

$\langle v_2, v_3\rangle = 0$, ali $\langle v_1, v_2\rangle \neq 0$. Stoga moramo Gram–Schmidtovim postupkom ortonormirati bazu (f):

$$\hat{v_1} = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$b_2 = v_2 - \langle v_2, \hat{v_1}\rangle\hat{v_1} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{5}(-4)\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix},$$

$$\hat{v_2} = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}.$$

Ostaje još samo normirati v_3 jer je okomit na $\hat{v_1}$ i $\hat{v_2}$ pa je

$$\hat{v_3} = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}.$$

Dakle, A se dijagonalizira u ONB $\hat{f} = \{\hat{v_1}, \hat{v_2}, \hat{v_3}\}$, tj. za matrice

$$D = A(\hat{f}) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 10\end{pmatrix}, \quad U = I(e, \hat{f}) = \begin{pmatrix}\hat{v_1} & \hat{v_2} & \hat{v_3}\end{pmatrix}$$

vrijedi $A(e) = UDU^*$.

DZ 6.10. Odredite ONB u kojima se dijagonaliziraju operatori $A \in L(\mathbb{C}^2)$, odnosno $B \in L(\mathbb{C}^3)$ čiji su matrični prikazi u kanonskoj bazi za $\mathbb{C}^2$, odnosno $\mathbb{C}^3$ dan sa

$$\text{a) } A(e) = \begin{pmatrix}0 & i\\i & 0\end{pmatrix}, \qquad \text{b) } B(e) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1+i & 1+5i & 2-2i\\1+5i & -1+i & -2+2i\\2-2i & -2+2i & -4-2i\end{pmatrix}.$$

Rješenje

a) $A(e)^* = -A(e)$ pa je $A(e)$ antihermitska (posebno, normalna) pa postoji ONB u kojoj se A dijagonalizira. Vrijedi: $D = \begin{pmatrix}i & 0\\0 & i\end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

b) $B(e)$ je unitarna, svojstvene vrijednosti su joj $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$, a njima pridruženi svojstveni vektori $v_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$. Oni su okomiti pa ih samo treba normirati pa za

$$D = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & i & 0\\0 & 0 & -i\end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix}\hat{v_1} & \hat{v_2} & \hat{v_3}\end{pmatrix}$$

vrijedi $A = UDU^*$.

ZADATAK 6.46. Zadan je linearni operator $A : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ sa

$$A\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-b & -a+b \\ d & -c \end{bmatrix}$$

Postoji li skalarni produkt na $M_2(\mathbb{C})$ uz koji će operator A iz a) dijela biti hermitski?

RJEŠENJE Općenito, za hermitske operatore na kompleksnom unitarnom K.D.V.P U vrijedi $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. To možemo dokazati na dva načina:

1. način: Kako je A hermitski operator, može se dijagonalizirati u ONB, tj. postoji ONB (f) t.d. $A(f)$ dijagonalna matrica, tj.

$$A(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Tada je $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, a kako je A hermitski, a (f) ONB, to je $A(f)$ hermitska matrica, a to znači da je za svaki $\lambda_i \in \sigma(A)$ $\lambda_i = \overline{\lambda_i}$, odnosno $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

2. način (iz definicije): Kako je A hermitski operator, za sve $x \in U$ vrijedi

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle.$$

Za $\lambda \in \sigma(A)$ postoji $x \in U \setminus \{0\}$ takav da je $Ax = \lambda x$. Za taj x vrijedi

$$\langle \lambda x, x\rangle = \langle x, \lambda x\rangle,$$

tj. $\lambda\|x\|^2 = \overline{\lambda}\|x\|^2$. Kako je $x \neq 0$, slijedi $\lambda = \overline{\lambda}$, tj. $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pretpostavimo da postoji skalarni produkt na $M_2(\mathbb{C})$ uz koji će operator A iz a) dijela biti hermitski. U tom slučaju je $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Neka je (e) kanonska baza za $M_2(\mathbb{C})$. Tada je

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

pa je $k_A(\lambda) = \det(A(e) - I) = (\lambda^2+1)(\lambda-2)\lambda$. Stoga je $\sigma(A) = \{0, 2, i, -i\}$. Budući da su i i $-i$ svojstvene vrijednosti operatora A, a one nisu realne, zaključujemo da ne postoji skalarni produkt na $M_2(\mathbb{C})$ uz koji će operator A iz a) dijela biti hermitski. □

ZADATAK 6.47. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$ unitaran hermitski operator. Što su moguće svojstvene vrijednosti za A? Dodatno, pokažite da uz dodatnu pretpostavku $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ za sve $x \in V$, nužno slijedi $A = I$.

RJEŠENJE Kako je A hermitski operator, postoji ONB (e) u kojoj se A dijagonalizira (bez obzira je li U kompleksan ili realan unitarni prostor). Dakle,

$$A(e) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Kako je A hermitski operator, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nadalje, kako je A unitaran operator, a (e) ONB, $A(e)$ je unitarna matrica pa vrijedi

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\mathrm{diag}(\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n}) = I,$$

odnosno $|\lambda_i|^2 = 1$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$. Kako su sve svojstvene vrijednosti realne, to je $\lambda_i \in \{1, -1\}$. Uz dodatnu pretpostavku $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ za sve $x \in V$, vrijedi $\langle \lambda x, x\rangle \geq 0$, gdje je $\lambda \in \sigma(A)$, a x svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost λ. Stoga je $\lambda\|x\|^2 \geq 0$, a odatle slijedi (budući da je $x \neq 0$) da je $\lambda \geq 0$ za svaki $\lambda \in \sigma(A)$ pa imamo

$$A(e) = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1),$$

odnosno $A = I$. □

Poglavlje 7

Kvadratne forme

7.1 Dijagonalizacija kvadratne forme

DEFINICIJA 7.1. **Simetrična kvadratna forma** je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadana sa

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle,$$

gdje je A simetrična realna matrica.

DEFINICIJA 7.2. Kažemo da je kvadratna forma

- **pozitivno definitna** ako je $\langle Ax, x \rangle > 0$ za $x \neq 0$;
- **pozitivno semidefinitna** ako je $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ za $x \in \mathbb{R}^n$;
- **negativno definitna** ako je $\langle Ax, x \rangle < 0$ za $x \neq 0$;
- **negativno semidefinitna** ako je $\langle Ax, x \rangle \leq 0$ za $x \in \mathbb{R}^n$;

Za sve ostale forme kažemo da su **indefinitne**.

DEFINICIJA 7.3. Kvadratna forma je **kanonska** ako je odgovarajuća matrica dijagonalna.

Simetričnu matricu A možemo zapisati u obliku $A = QDQ^T$, pri čemu je Q ortogonalna, a D dijagonalna matrica. Tada je

$$\langle Ax, x \rangle = \left\langle QDQ^T x, x \right\rangle = \left\langle DQ^T x, Q^T x \right\rangle.$$

Uvedemo li supstituciju $Q^T x = y$, dobivamo

$$\langle Ax, x \rangle = \langle Dy, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2,$$

pri čemu je $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Prema tome, svaka se kvadratna forma može svesti na kanonsku supstitucijom $y = Q^T x$.

ZADATAK 7.1. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

RJEŠENJE $f(x) = \langle Ax, x\rangle = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$, odakle dobijemo da gornja forma odgovara simetričnoj matrici

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Njene svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$. Pripadne svojstvene vektore $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ normiramo i od njih formiramo stupce ortogonalne matrice Q. Dakle,

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Uvođenjem supstitucije $y = Q^T x$, tj. $x = Qy$ i uvrštavanjem u početni oblik, dobijemo

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$$

ZADATAK 7.2. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

RJEŠENJE $f(x) = \langle Ax, x\rangle = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, odakle dobijemo da gornja forma odgovara simetričnoj matrici

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Njene svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 4$. Ortonormiranjem pripadnih svojstvenih vektora dobijemo matricu

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Uvođenjem supstitucije $y = Q^T x$, tj. $x = Qy$ i uvrštavanjem u početni oblik, dobijemo

$$f(x_1, x_2, x_3) = -2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2$$

Teorem 7.4. *Kvadratna forma je*

- *pozitivno definitna ako i samo ako je $\lambda_i > 0$ za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$;*
- *pozitivno semidefinitna ako i samo ako je $\lambda_i \geq 0$ za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$;*
- *negativno definitna ako i samo ako je $\lambda_i < 0$ za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$;*
- *negativno semidefinitna ako i samo akoje $\lambda_i \leq 0$ za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

- *indefinitna ako postoje λ_i i λ_j takvi da je $\lambda_i > 0$ i $\lambda_j < 0$.*

Tip kvadratne forme možemo provjeriti i bez da dijagonaliziramo matricu A koristeći **Sylvesterov kriterij**: Brojeve $D_1 = |a_{11}|$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \cdots, D_n = \det A$ zovemo **glavne minore** matrice A.

Teorem 7.5 (Sylvesterov kriterij). *Kvadratna forma q je pozitivno definitna ako i samo ako je $D_i > 0$ za sve $i = 1, \cdots, n$, a negativno definitna ako i samo ako je $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0, D_4 > 0 \cdots$.*

Primjer 7.6. Sylvesterov kriterij se ne može koristiti za pokazivanje pozitivne/negativne semidefinitnosti forme. Naime, postoje primjeri simetričnih matrica za čije minore vrijedi $D_i \geq 0$, no one nisu pozitivno semidefinitne. Jedan takav je:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vrijedi $D_1 = 1, D_2 = D_3 = 0$, no $\sigma(B) = \{0, \frac{3\pm\sqrt{33}}{2}\}$. (Uvjerite se sami!) Iz spektra od B vidimo da je forma zadana s $q(x) = \langle Bx, x\rangle$ indefinitna.
Za domaću zadaću pronađite primjer simetrične 3×3 matrice za koju vrijedi $D_1 \leq 0, D_2 \geq 0, D_3 \leq 0$ i koja ima (barem jednu) pozitivnu svojstvenu vrijednost.

Zadatak 7.3. Odredite sve $\lambda \in \mathbb{R}$ za koje je forma

$$f(x_1, x_2, x_3) = \lambda x_1^2 + \lambda x_2^2 + (\lambda - 3)x_3^2 + 2x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 2x_2x_3$$

negativno definitna.

Rješenje $f(x) = \langle Ax, x\rangle = \lambda x_1^2 + \lambda x_2^2 + (\lambda - 3)x_3^2 + 2x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 2x_2x_3$, odakle dobijemo da gornja forma odgovara simetričnoj matrici

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda - 3 \end{bmatrix}.$$

Prema Sylvesterovom kriteriju, f je negativno definitna ako i samo ako je

$$D_1 = \lambda < 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \det A < 0,$$

tj. $\lambda < 0$, $\lambda^2 - 1 > 0$ i $3(1 - \lambda^2) < 0$, tj. ako i samo ako je $\lambda < -1$. □

7.2 Krivulje i plohe drugog reda

Polinom drugog stupnja je funkcija oblika

$$p(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c,$$

gdje je A simetrična kvadratna matrica, b je stupac, a c je realni broj.
Krivulja (ploha) drugog reda je skup

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3) : p(x) = 0\}.$$

Gledamo nedegenerirani slučaj, tj. slučaj kad je $A \neq 0$. Vrstu krivulje (plohe) određujemo dijagonalizacijom kvadratne forme. Pri tom dijagonaliziramo pomoću ortogonalnih matrica kako bi i novi sustav bio kartezijev (imao okomite osi).

ZADATAK 7.4. Odredite krivulju zadanu jednadžbom

$$41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0. \tag{7.1}$$

RJEŠENJE Danu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c = 0,$$

gdje je

$$A = \begin{pmatrix} 41 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad c = -36.$$

Matrica A ima svojstvene vrijednosti $\sigma(A) = \{45, 5\}$, a odgovarajući normirani svojstveni vektori su

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Od njih formiramo matricu Q kao

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Nove varijable se mogu izraziti preko starih kao

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

a stare preko novih kao

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' - y') \\ \frac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y') \end{pmatrix}$$

Uvrstimo u (7.1) i dobivamo jednadžbu

$$45x'^2 + 5y'^2 + \frac{90}{\sqrt{10}}x' + \frac{30}{\sqrt{10}}y' - 36 = 0$$

odnosno

$$45\left(x'^2 + \frac{2}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{10}\right) - \frac{45}{10} + 5\left(y'^2 + \frac{6}{\sqrt{10}}y' + \frac{9}{10}\right) - \frac{45}{10} - 36 = 0.$$

Uvedimo nove varijable translacijom sustava

$$x'' = x' + \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad y'' = y' + \frac{3}{\sqrt{10}}$$

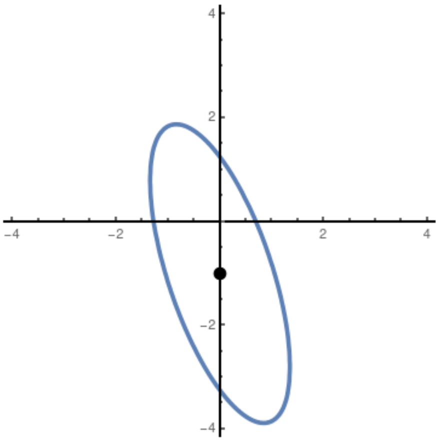
pa se jednadžba svodi na

$$45x''^2 + 5y''^2 = 45,$$

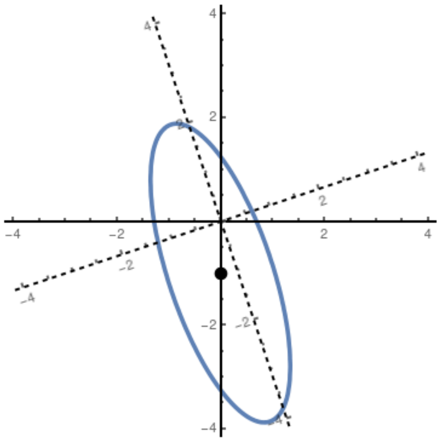
tj.

$$\frac{x''^2}{1} + \frac{y''^2}{9} = 1$$

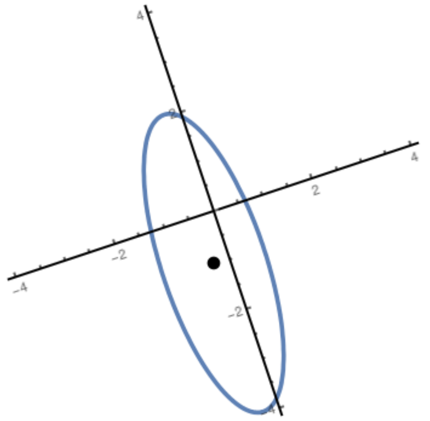
što je jednadžba elipse centralne u sustavu $\{x'', y''\}$. Taj sustav je dobiven od početnog $\{x, y\}$ rotacijom za kut φ, a potom translacijom (u zarotiranom sustavu) za vektor $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.



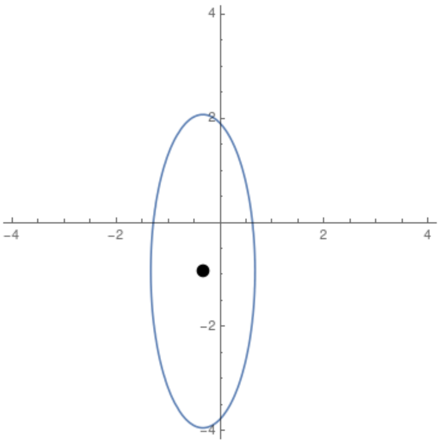
Slika 7.1: Krivulja u xy sustavu



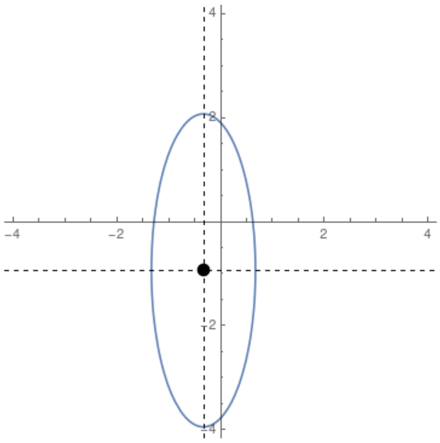
Slika 7.2: Krivulja u sustavima xy i $x'y'$



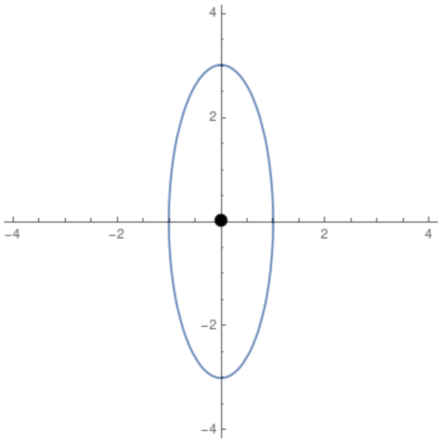
Slika 7.3: Krivulja u $x'y'$ sustavu



Slika 7.4: Krivulja u $x'y'$ sustavu



Slika 7.5: Krivulja u sustavima $x'y'$ i $x''y''$



Slika 7.6: Krivulja u $x''y''$ sustavu

ZADATAK 7.5. Odredite krivulju zadanu jednadžbom

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$$

RJEŠENJE Danu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c = 0,$$

gdje je

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \end{pmatrix}, \quad c = -13.$$

Matrica A ima svojstvene vrijednosti $\sigma(A) = \{8, -2\}$, a odgovarajući normirani svojstveni vektori daju matricu Q:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Stare varijable se mogu izraziti preko novih kao

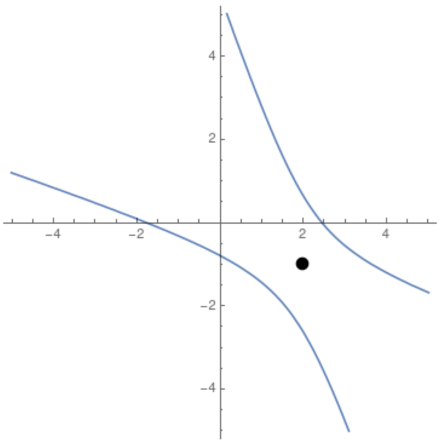
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{pmatrix}$$

Uvrstimo u početnu jednadžbu i dobivamo jednadžbu

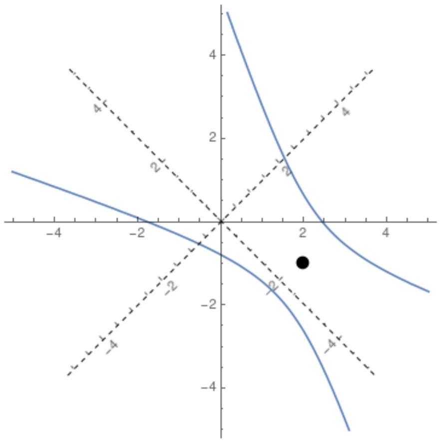
$$8x'^2 - 2y'^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}x' - \frac{12}{\sqrt{2}}y' - 13 = 0$$

odnosno

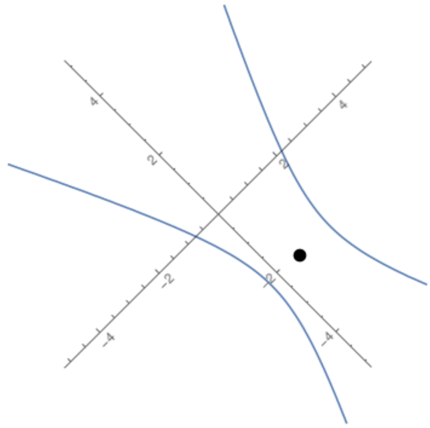
$$8\left(x'^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{2}\right) - 4 - 2\left(y'^2 + \frac{6}{\sqrt{2}}y' + \frac{9}{2}\right) + 9 - 13 = 0.$$



Slika 7.7: Krivulja u xy sustavu



Slika 7.8: Krivulja u sustavima xy i $x'y'$



Slika 7.9: Krivulja u $x'y'$ sustavu

Uvedimo nove varijable translacijom sustava

$$x'' = x' - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y'' = y' + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

pa se jednadžba svodi na

$$8x''^2 - 2y''^2 = 8,$$

tj.

$$\frac{x''^2}{1} - \frac{y''^2}{4} = 1$$

što je jednadžba hiperbole centralne u sustavu $\{x'', y''\}$. Taj sustav je dobiven od početnog $\{x, y\}$ rotacijom za kut $\varphi = \frac{\pi}{4}$, a potom translacijom (u zarotiranom sustavu) za vektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Zadatak 7.6. Odredite plohu zadanu jednadžbom

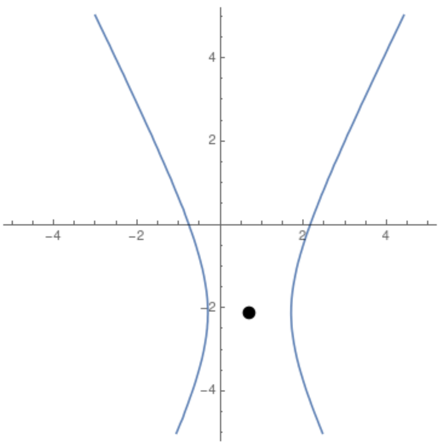
$$9x^2 + 20y^2 + 20z^2 - 40yz - 36x - 4\sqrt{2}y + 4\sqrt{2}z + 4 = 0.$$

Rješenje Matrica ove kvadratne forme je

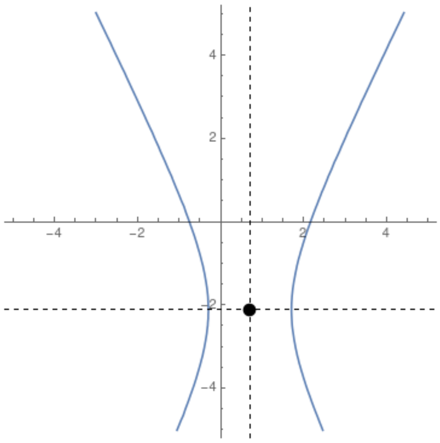
$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -20 \\ 0 & -20 & 20 \end{pmatrix}.$$

Njene svojstvene vrijednosti su $\sigma(A) = \{9, 40, 0\}$ i odgovarajući svojstveni vektori daju matricu

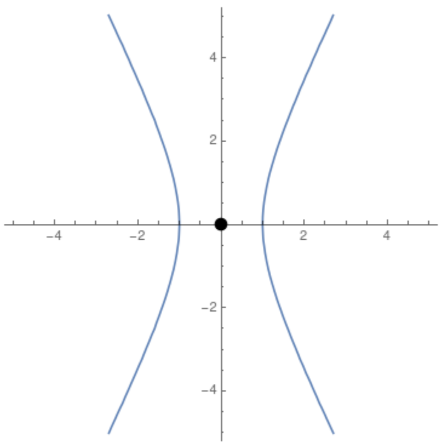
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$



Slika 7.10: Krivulja u $x'y'$ sustavu



Slika 7.11: Krivulja u sustavima $x'y'$ i $x''y''$



Slika 7.12: Krivulja u $x''y''$ sustavu

i uz supstituciju

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

dobivamo jednadžbu

$$9x'^2 + 40y'^2 - 36x' - 8y' + 4 = 0,$$

tj.

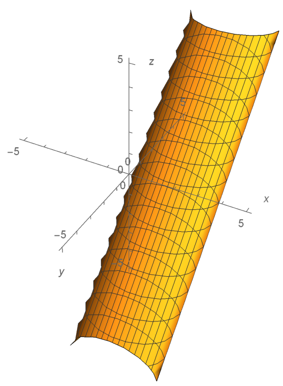
$$9\left(x'^2 - 4x' + 4\right) + 40\left(y'^2 - \frac{1}{5}y' + \frac{1}{100}\right) = 32.4.$$

Nakon supstitucije

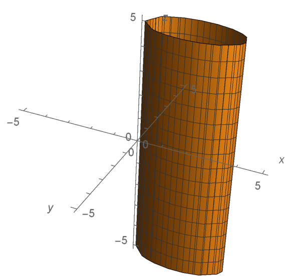
$$x'' = x' - 2, \quad y'' = y' - \frac{1}{10},$$

dobivamo jednadžbu cilindra

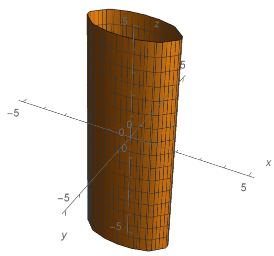
$$\frac{x''^2}{3.6} + \frac{y''^2}{0.81} = 1.$$



Slika 7.13: Ploha $9x^2 + 20y^2 + 20z^2 - 40yz - 36x - 4\sqrt{2}y + 4\sqrt{2}z + 4 = 0$



Slika 7.14: Ploha $9x'^2 + 40y'^2 - 36x' - 8y' + 4 = 0$



Slika 7.15: Ploha $\frac{x''^2}{3.6} + \frac{y''^2}{0.81} = 1$

$\square$

DZ 7.1. Odredite krivulje zadane jednadžbama

(a) $17x^2 + 12xy + 8y^2 + 20\sqrt{5}x + 20 = 0$,

(b) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$,

(c) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0$.

DZ 7.2. Odredite plohe zadane jednadžbama

(a) $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4xz - 16x - 16y - 8z + 72 = 0$,

(b) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 10xz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$.