LA2 2022./2023. Treća domaća zadaća

1. Pokažite da je formulom $\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$ definiran jedan skalarni produkt na prostoru $P_2(\mathbb{R})$ svih realnih polinoma čiji stupanj nije veći od 2. Je li to skalarni produkt i na prostoru P_3?

2. Za potprostor $M \leq \mathbb{R}^4$ razapet vektorima $(1,3,0,2), (3,7,-1,2), (2,4,-1,1)$ odredite neku ortonormiranu bazu ortogonalnog komplementa $M^\perp$.

3. U prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sa skalarnim produktom $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(Y^t X)$ odredite ortogonalnu projekciju matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ na potprostor svih simetričnih matrica.

4. U prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sa skalarnim produktom $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(Y^t X)$ prikažite $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ u obliku $A = B + C$, pri čemu je $B \in M$, $C \in M^\perp$, ako je M potprostor svih matrica traga nula (tj. $M = \mathrm{Ker}\ \mathrm{tr}$).

5. Odredite najbolje približno rješenje (u smislu najmanjih kvadrata) sustava

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & -1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & = & 0 \end{array}.$$