

LINEARNA ALGEBRA 2

Treći ispitni rok - 24. kolovoza 2026.

ZADATAK 1

Promotrimo linearan operator $A \in L(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}))$ zadan formulom

$$(Ap)(t) = tp'(t) + (1 - t^2)p''(t), \quad p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}).$$

- (a) (12 bodova) Odredite po jednu bazu za jezgru i za sliku operatora A .
- (b) (8 bodova) Može li se operator A dijagonalizirati?

Rješenje: Za $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ računamo:

$$(Ap)(t) = t(b + 2ct + 3dt^2) + (1 - t^2)(2c + 6dt) = 2c + (b + 6d)t - 3dt^3. \quad (1)$$

- (a) Slijedi

$$p \in \ker A \iff Ap = 0 \iff \begin{cases} 2c = 0, \\ b + 6d = 0, \\ -3d = 0 \end{cases} \iff b = c = d = 0 \iff p(t) = a.$$

Zaključujemo da je $\ker A = [\{1\}]$ pa je $\{1\}$ jedna baza za $\ker A$. S druge strane, slika operatora A je razapeta vektorima u koje A preslikava elemente kanonske baze, pa imamo

$$\operatorname{Im} A = [\{A(1), A(t), A(t^2), A(t^3)\}] = [\{0, t, 2, 6t - 3t^3\}] = [\{1, t, t^3\}].$$

Jedna baza za $\operatorname{Im} A$ je upravo $\{1, t, t^3\}$.

- (b) Iz računa (1) direktno očitavamo matrični prikaz operatora A u kanonskoj bazi $(e) = \{1, t, t^2, t^3\}$:

$$A(e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Matrica je gornjetrokutasta pa za karakteristični polinom direktno očitavamo

$$k_A(t) = t^2(t - 1)(t + 3).$$

Algebarska kratnost svojstvene vrijednosti 0 je jednaka 2, međutim njena geometrijska kratnost je jednaka $d(A) = \dim \ker A = 1$. Zaključujemo da se operator A ne može dijagonalizirati.

ZADATAK 2

U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^3$ zadana je baza

$$(b) = \{b_1, b_2, b_3\} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}.$$

- (a) (6 bodova) Ako je $(b^*) = \{b_1^*, b_2^*, b_3^*\}$ dualna baza od (b) , odredite $b_i^*(x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$, za proizvoljan $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- (b) (14 bodova) Neka je $M = [\{b_1, b_2\}]$, $N = [\{b_3\}]$ i P projektor na M u smjeru N . Ako je (e) kanonska baza za $\mathbb{R}^3$, odredite matrične zapise:

$$P(e), P(b), P^*(e), P^*(b).$$

Rješenje:

- (a) Budući da vrijedi

$$(x, y, z) = \sum_{i=1}^3 b_i^*(x, y, z) b_i,$$

treba odrediti koeficijente u prikazu (x, y, z) u bazi (b) . Rješavanjem sustava dobiva se:

$$\begin{aligned} b_1^*(x, y, z) &= \frac{1}{2}(x + y - z) \\ b_2^*(x, y, z) &= \frac{1}{2}(-x + y + z) \\ b_3^*(x, y, z) &= \frac{1}{2}(x - y + z) \end{aligned}$$

- (b) Kako je po definiciji projektora $P(b_1) = b_1$, $P(b_2) = b_2$, $P(b_3) = 0$, imamo da je

$$P(b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz (a) dijela možemo lako odrediti $P(x, y, z)$, za proizvoljan $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Imamo:

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= P\left(\sum_{i=1}^3 b_i^*(x, y, z) b_i\right) \\ &= b_1^*(x, y, z) b_1 + b_2^*(x, y, z) b_2 \\ &= \left(\frac{1}{2}(x + y - z), y, \frac{1}{2}(-x + y + z)\right). \end{aligned}$$

Sada vidimo da je:

$$P(e) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kako je (e) ortonormirana baza, imamo:

$$P^*(e) = (P(e))^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iz (a) dijela lako očitamo matricu

$$I(b, e) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

a očito je

$$I(e, b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada je

$$P^*(b) = I(b, e)P^*(e)I(e, b) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

ZADATAK 3

Zadano je bilinearno preslikavanje $[\cdot, \cdot] : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ s

$$[(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)] = 3x_1y_1 + 3x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

- (a) (8 bodova) Pokažite da je s $[\cdot, \cdot]$ dan jedan skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$.
- (b) (6 bodova) U unitarnom prostoru $(\mathbb{R}^3, [\cdot, \cdot])$ odredite ortogonalni komplement potprostora

$$M = [\{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}].$$

- (c) (8 bodova) U istom unitarnom prostoru odredite najbolju aproksimaciju vektora $x = (2, 1, 0)$ elementima iz M .

Rješenje:

- (a) Preslikavanje $[\cdot, \cdot]$ možemo zapisati kao $[x, y] = \langle Ax, y \rangle$, gdje je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ standardni skalarni produkt te $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Sada je dovoljno provjeriti pozitivnu definitnost pripadne kvadratne forme, što se može napraviti npr. preko Sylvesterovog kriterija, gdje se jednostavno vidi da su sve glavne minore pozitivne, pa je ovo zaista skalarni produkt.
- (b) Za odrediti $M^\perp$ dovoljno je pronaći jedan netrivialan vektor ortogonalan na $(1, -1, 0)$ i $(0, 1, -1)$. Njega pak možemo dobiti rješavanjem sustava

$$\begin{aligned} [(x, y, z), (1, -1, 0)] &= 0 \\ [(x, y, z), (0, 1, -1)] &= 0, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} 3x + y + z - (x + 3y + z) &= 0 \\ x + 3y + z - (x + y + 3z) &= 0, \end{aligned}$$

odakle slijedi $x = y = z$. Stoga je $M^\perp = [\{(1, 1, 1)\}]$.

- (c) Tražimo rastav vektora x s obzirom na $\mathbb{R}^3 = M \oplus M^\perp$; iz

$$x = \underbrace{\alpha(1, -1, 0) + \beta(0, 1, -1)}_{x_M} + \underbrace{\gamma(1, 1, 1)}_{x_{M^\perp}}$$

slijedi $\alpha = \beta = \gamma = 1$, pa je tražena najbolja aproksimacija $x_M = (1, -1, 0) + (0, 1, -1) = (1, 0, -1)$.

ZADATAK 4

Za matricu $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ zadan je linearni operator $T \in L(M_2(\mathbb{R}))$ sa

$$T(X) = AXA.$$

Prostor $M_2(\mathbb{R})$ promatramo kao unitarni prostor sa standardnim skalarnim produktom $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T)$.

- (a) (8 bodova) Dokažite da je T unitaran i hermitski.
- (b) (12 bodova) Odredite ortonormiranu bazu za $M_2(\mathbb{R})$ u kojoj se T dijagonalizira.

Rješenje:

- (a) Vrijedi

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix},$$

pa je očito $\|T(X)\| = \|X\|$, za svaku matricu $X \in M_2(\mathbb{R})$. Iz ovoga slijedi da je T unitaran, dakle $T^{-1} = T^*$.

Kako bi dokazali da je T hermitski, odnosno $T = T^*$, dovoljno je dokazati da je $T^2 = I$. Kako je A^2 jedinična matrica, imamo

$$T^2(X) = A(AXA)A = A^2XA^2 = X.$$

- (b) Kako je T unitaran i hermitski, imamo da je $\sigma(T) \subseteq \{-1, 1\}$.

Vidimo da $T(X) = X$, odnosno

$$\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

vrijedi za matrice oblika $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, pa je

$$V_T(1) = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right].$$

Slično, imamo da je $T(X) = -X$ za matrice oblika $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}$, pa je

$$V_T(-1) = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right].$$

Tražena ortonormirana baza je

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Zadatak se može riješiti i preko matričnog prikaza od T . Prikaz od T u kanonskoj bazi (E) je

$$T(E) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo da je to simetrična matrica, pa slijedi da je T hermitski. Iz matričnog prikaza također vidimo da je $T = T^{-1}$, pa je T i unitaran (jer je $T^* = T = T^{-1}$).

Dobiva se da je $k_T(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^2$, pa možemo i tako vidjeti da je $\sigma(T) = \{-1, 1\}$.

ZADATAK 5

(20 bodova) Neka je V konačnodimenzionalni realni unitarni prostor te $x, y \in V$ takvi da je

$$\|x + y\| = 4, \quad \|x - y\| = \|x\| = 2.$$

Odredite skup $\{e_1, e_2\}$ koji nastaje Gram-Schmidtovom ortogonalizacijom skupa $\{x, y\}$.
(Vektori e_1, e_2 trebaju biti zapisani kao linearne kombinacije vektora x i y .)

Rješenje: Gram-Schmidtovom ortogonalizacijom je

$$e_1 = \frac{1}{\|x\|}x = \frac{1}{2}x.$$

Nadalje,

$$f_2 = y - \langle y, e_1 \rangle e_1 = y - \frac{1}{4}\langle y, x \rangle x.$$

Iz polarizacijskog identiteta za realni unitarni prostor slijedi

$$\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = 3,$$

pa je $f_2 = y - \frac{3}{4}x$. Sada je

$$\|f_2\|^2 = \langle y - \frac{3}{4}x, y - \frac{3}{4}x \rangle = \|y\|^2 - \frac{3}{2}\langle x, y \rangle + \frac{9}{16}\|x\|^2.$$

Iz relacije paralelograma $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ slijedi $\|y\|^2 = 6$, pa je $\|f_2\| = \frac{\sqrt{15}}{2}$.
Sada je

$$e_2 = \frac{1}{\|f_2\|}f_2 = \frac{2}{\sqrt{15}}(y - \frac{3}{4}x) = -\frac{\sqrt{15}}{10}x + \frac{2\sqrt{15}}{15}y.$$