LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi ispitni rok – 14. veljače 2024.

Dopušteno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje.

1. a) (15 bodova) Dokažite da je preslikavanja iz $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ u $\mathbb{R}$ zadano sa

$$s(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 + 7x_3y_3,$$

gdje je $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$, skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$ i ortonormirajte skup vektora $\{(1, 0, 1), (1, 5, -1)\}$ s obzirom na taj skalarni produkt.

   b) (5 bodova) Zadan je unitarni prostor $\mathbb{C}^3$ sa standardnim skalarnim produktom. Pomoću Gramove matrice ispitajte linearnu nezavisnost skupa $S = \{(1, i, 1), (i, 1, -1), (1, 1, i)\}$.

2. (20 bodova) Zadane su točke $T_1 = (-1, 3)$, $T_2 = (2, 1)$, $T_3 = (1, 2)$, $T_4 = (-2, -2)$, $T_5 = (0, 2)$. Koristeći ortogonalnu projekciju, odredite pravac $y = kx + l$ koji najbolje aproksimira dane točke.

3. a) (15 bodova) Zadan je linearni operator $A : \mathcal{P}_2 \to M_2(\mathbb{R})$ formulom:

$$A(p) = \begin{bmatrix} p'''(1) & p(1) \\ p'(1) & \frac{1}{2}p''(1) - p(0) \end{bmatrix}$$

Odredite mu rang, defekt te po jednu bazu za jezgru i sliku. Odredite matrični prikaz operatora A u paru kanonskih baza za $\mathcal{P}_2$ i $M_2(\mathbb{R})$.

   b) (5 bodova) Zadan je linearni operator $A : \mathcal{P}_n \to M_2(\mathbb{R})$ istom formulom:

$$A(p) = \begin{bmatrix} p'''(1) & p(1) \\ p'(1) & \frac{1}{2}p''(1) - p(0) \end{bmatrix}$$

Odredite sve $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ za koje je $d(A) = 0$ (ako takvi postoje).

4. Zadan je linearni operator $A : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$,

$$A(a + bt + ct^2) = a + (a + 2b)t + (a + b + c)t^2.$$

   a) (5 bodova) Odredite matrični prikaz operatora A u bazi $(e') = \{1 - t, 1 + t^2, t^2\}$.

   b) (15 bodova) Dokažite da je operator A dijagonalizabilan i odredite neku bazu u kojoj se A dijagonalizira. Je li ta baza jedinstvena?

5. a) (7 bodova) Neka je L potprostor konačnodimenzionalnog unitarnog prostora $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$, a x bilo koji vektor prostora V. Definirajte ortogonalnu projekciju proizvoljnog (općeg) vektora $x \in V$ na potprostor L. Nadalje, ako je $\{e_1, \ldots, e_l\}$ ortonormirana baza potprostora L, dokažite da je ortogonalna projekcija vektora x na potprostor L dana s

$$x_L = \sum_{i=1}^{l} \langle x|e_i\rangle e_i.$$

   b) (6 bodova) Definirajte slične matrice i dokažite da slične matrice imaju isti trag i determinantu.

   c) (7 bodova) Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, $A : V \to V$ linearni operator. Definirajte svojstvenu vrijednost linearnog operator A i dokažite da je $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost linearnog operatora A ako i samo ako je nultočka karakterističnog polinoma $k_A(\lambda)$.