LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – 19. studenog 2024.

Zadatak 1. (12 bodova) Odredite sve parametre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ za koje je preslikavanje $s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zadano s

$$s(x, y) = 5x_1y_1 + \alpha x_1y_2 + \beta x_2y_1 + \alpha\beta x_2y_2 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + 2x_3y_3$$

skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$.

Rješenje. Jedno od svojstava koje preslikavanje s mora zadovoljavati da bi bilo skalarni produkt je $s(y, x) = \overline{s(x, y)}$ za sve $x, y \in \mathbb{R}^3$. Uočimo da je $s(y, x) = \overline{s(x, y)}$ ako i samo ako vrijedi

$$\begin{aligned}&5x_1y_1 + \alpha x_1y_2 + \beta x_2y_1 + \alpha\beta x_2y_2 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + 2x_3y_3\\ =&5y_1x_1 + \alpha y_1x_2 + \beta y_2x_1 + \alpha\beta y_2x_2 - 2y_1x_3 - 2y_3x_1 + 2y_3x_3,\end{aligned}$$

odnosno ako i samo ako je

$$\alpha(x_1y_2 - y_1x_2) + \beta(x_2y_1 - y_2x_1) = 0,$$

tj. ako i samo ako je

$$(x_1y_2 - y_1x_2)(\alpha - \beta) = 0.$$

Da bi posljednja jednakost vrijedila za sve $x, y \in \mathbb{R}^3$, nužno je $\alpha - \beta = 0$. Ukoliko bi vrijedilo $\alpha - \beta \neq 0$, onda, da bi vrijedilo $s(y, x) = \overline{s(x, y)}$ za sve $x, y \in \mathbb{R}^3$, mora biti $x_1y_2 - y_1x_2 = 0$ za sve $x, y \in \mathbb{R}^3$, a to očito nije istina (uzmimo npr. $x = (1, 1, 0), y = (1, 0, 0)$). Dakle, da bi s uopće imao šansu biti skalarni produkt, mora vrijediti $\alpha - \beta = 0$, odnosno $\alpha = \beta$.

Ukoliko je $\alpha = \beta$, imamo

$$s(x, y) = 5x_1y_1 + \alpha x_1y_2 + \alpha x_2y_1 + \alpha^2 x_2y_2 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + 2x_3y_3.$$

Sada je

$$\begin{aligned}s(x, x) &= 5x_1^2 + 2\alpha x_1x_2 + \alpha^2 x_2^2 - 4x_1x_3 + 2x_3^2\\ &= (x_1 + \alpha x_2)^2 + 4x_1^2 - 4x_1x_3 + 2x_3^2\\ &= (x_1 + \alpha x_2)^2 + (2x_1 - x_3)^2 + x_3^2 \geq 0\end{aligned}$$

i vrijedi $s(x, x) = 0$ ako i samo ako je

$$x_1 + \alpha x_2 = 0,\ 2x_1 - x_3 = 0,\ x_3 = 0,$$

tj. ako i samo ako je $x_3 = 0, x_1 = 0, \alpha x_2 = 0$. Ako je $\alpha = \beta = 0$, onda npr. za $x = (0, 1, 0)$ vrijedi $s((0, 1, 0), (0, 1, 0)) = 0$ pa s nije skalarni produkt za $\alpha = \beta = 0$.

Ako je $\alpha = \beta \neq 0$, onda je $s(x, x) = 0$ ako i samo ako je $x = (0, 0, 0)$. Dakle, za $\alpha = \beta \neq 0$, preslikavanje s zadovoljava i svojstvo pozitivne definitnosti i svojstvo hermitske simetričnosti. Lagano se provjeri da u tim slučajevima s zadovoljava i svojstvo homogenosti i aditivnosti (taj dio prepuštamo čitatelju).

Dakle, s je skalarni produkt ako i samo ako je $\alpha = \beta \neq 0$.

Zadatak 2. (10 bodova)

a) (7 bodova) Provjerite je li preslikavanje $n : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zadano s

$$n(x_1, x_2, x_3) = |3x_1 + 2x_2| + |x_1 + 2x_2| + |-x_1 - x_2 + x_3|$$

norma na $\mathbb{R}^3$.

b) (3 boda) Ukoliko je n norma, je li inducirana nekim skalarnim produktom na $\mathbb{R}^3$? Obrazložite odgovor.

Rješenje.

a) Provjerimo svojstva norme

(1) $n(x_1, x_2, x_3) = |3x_1 + 2x_2| + |x_1 + 2x_2| + |-x_1 - x_2 + x_3| \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}^3$. Nadalje, budući da je $|3x_1 + 2x_2| \geq 0$, $|x_1 + 2x_2| \geq 0$, $|-x_1 - x_2 + x_3| \geq 0$, vrijedi $n(x) = 0$ ako i samo ako je

$$|3x_1 + 2x_2| = |x_1 + 2x_2| = |-x_1 - x_2 + x_3| = 0,$$

odnosno ako i samo ako je

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Iz prve dvije jednadžbe dobivamo $3x_1 = x_1$ pa je $x_1 = 0$, a onda iz prve jednadžbe slijedi $x_2 = 0$, a iz treće $x_3 = 0$. Dakle, $n(x) = 0$ ako i samo ako je $x = (0, 0, 0)$.

(2)

$$\begin{aligned} n(\lambda x) &= |3(\lambda x_1) + 2(\lambda x_2)| + |(\lambda x_1) + 2(\lambda x_2)| + |-(\lambda x_1) - (\lambda x_2) + (\lambda x_3)| \\ &= |\lambda|(|3x_1 + 2x_2| + |x_1 + 2x_2| + |-x_1 - x_2 + x_3|) = |\lambda| n(x) \end{aligned}$$

za sve $x \in \mathbb{R}^3$ i za sve $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3)

$$\begin{aligned} n(x + y) &= |3(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2)| + |(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2)| \\ &\quad + |-(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3)| \\ &= |(3x_1 + 2x_2) + (3y_1 + 2y_2)| + |(x_1 + 2x_2) + (y_1 + 2y_2)| \\ &\quad + |(-x_1 - x_2 + x_3) + (-y_1 - y_2 + y_3)| \\ &\leq |3x_1 + 2x_2| + |3y_1 + 2y_2| + |x_1 + 2x_2| + |y_1 + 2y_2| \\ &\quad + |-x_1 - x_2 + x_3| + |-y_1 - y_2 + y_3| \\ &= |3x_1 + 2x_2| + |x_1 + 2x_2| + |-x_1 - x_2 + x_3| \\ &\quad + |3y_1 + 2y_2| + |y_1 + 2y_2| + |-y_1 - y_2 + y_3| = n(x) + n(y) \end{aligned}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}^3$.

Dakle, n je norma na $\mathbb{R}^3$.

b) Norma nije inducirana skalarnim produktom. Na primjer, za vektore $x = (1, 0, 0)$ $y = (0, 1, 0)$ vrijedi

$$n(x + y)^2 + n(x - y)^2 = n(1, 1, 0)^2 + n(1, -1, 0)^2 = (5 + 3 + 2)^2 + (1 + 1 + 0)^2 = 100 + 4 = 104,$$

dok je

$$2(n(x)^2 + n(y)^2) = 2(n(1, 0, 0)^2 + n(0, 1, 0)^2) = 2((3 + 1 + 1)^2 + (2 + 2 + 1)^2) = 2(25 + 25) = 100.$$

Kako nije zadovoljena relacija paralelograma za gornje x i y, zaključujemo da norma nije inducirana skalarnim produktom.

Zadatak 3. (8 bodova) Na prostoru $M_2(\mathbb{R})$ dan je skalarni produkt

$$s\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}\right) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_4y_4.$$

a) (4 boda) Odredite jednu bazu za ortogonalni komplement potprostora

$$M = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : -2a + b + c = 0,\ -3b + 3c - 2d = 0\right\}$$

s obzirom na taj skalarni produkt.

b) (4 boda) Odredite $d\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, M\right)$.

Rješenje.

a) Odredimo najprije neku bazu za potprostor M. Vrijedi

$$M = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : -2a + b + c = 0,\ -3b + 3c - 2d = 0\right\} = \left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(b+c) & b \\ c & \frac{3}{2}(-b+c) \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= \left\{\frac{1}{2}b\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}c\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R}\right\} = \left[\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right\}\right]$$

Označimo te dvije matrice s A_1 i A_2, redom. Matrica $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ je u $M^\perp$ ako i samo ako je $\langle A \,|\, A_1\rangle = \langle A \,|\, A_2\rangle = 0$, odnosno ako i samo ako je

$$x + 2y - 6w = 0,\ x + 2z + 6w = 0,$$

odnosno ako i samo ako je $y = \frac{1}{2}(-x + 6w)$, $z = \frac{1}{2}(-x - 6w)$. Dakle,

$$M^\perp = \left\{\begin{bmatrix} x & \frac{1}{2}(-x+6w) \\ \frac{1}{2}(-x-6w) & w \end{bmatrix} : x, w \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\frac{1}{2}x\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} : x, w \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= \left[\left\{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right]$$

b) Označimo s $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. Tada je

$$d(B, M) = d(B, B_M) = ||B - B_M|| = ||B_{M^\perp}||,$$

gdje je B_M ortogonalna projekcija matrice B na potprostor M, a $B_M^\perp$ ortogonalna projekcija matrice B na potprostor $M^\perp$. Nađimo prvo jednu ortonormiranu bazu za $M^\perp$, što će biti jako jednostavno jer su matrice $B_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ i $B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ortogonalne s obzirom na zadani skalarni produkt. Normiranjem matrica B_1 i B_2 s obzirom na zadani skalarni produkt dobivamo ortonormiranu bazu

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

za $M^\perp$. Vrijedi

$$B_{M^\perp} = \langle B \,|\, E_1\rangle E_1 + \langle B \,|\, E_2\rangle E_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Dakle, $d(B, M) = ||B_{M^\perp}|| = \left|\left|\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\right|\right| = \sqrt{26}$.

Zadatak 4. (10 bodova) Koristeći ortogonalnu projekciju, odredite polinom p iz vektorskog potprostora $M = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(1) = p(-1) = 0\} \leq \mathcal{P}_3$ za kojeg je izraz

$$\int_{-1}^{1} (t^3 - p(t))^2 dt$$

najmanji mogući.

Rješenje. Označimo $p_0(t) = t^3$. Prostor $\mathcal{P}_3$ promatramo uz skalarni produkt $\langle p \,|\, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$. Sada zadatak možemo reformulirati: odredite $p \in M$ takav da je

$$\|p_0 - p\| \leq \|p_0 - q\|, \quad \forall q \in M.$$

Dakle, tražimo ortogonalnu projekciju vektora p_0 na potprostor M. Uočimo da je

$$M = \{at^3 + bt^2 + ct + d \,|\, a + b + c + d = 0,\, -a + b - c + d = 0\} = [\{1 - t^2, t - t^3\}].$$

Stavimo $p_1(t) = 1 - t^2$, $p_2(t) = t - t^3$. Primjenom G-S postupka na vektore p_1 i p_2 (koji su okomiti s obzirom na dani skalarni produkt) dobijemo vektore

$$e_1(t) = \frac{\sqrt{15}}{4}(1 - t^2),\ e_2(t) = \frac{\sqrt{105}}{4}(t - t^3).$$

Ortogonalna projekcija je dana s $p_M = \langle p_0 \,|\, e_1\rangle e_1 + \langle p_0 \,|\, e_2\rangle e_2 = \frac{3}{4}(t - t^3)$.

Zadatak 5. (10 bodova)

a) (6 bodova) Neka je $(V, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle)$ unitarni prostor. Dokažite da je preslikavanje $n : V \to \mathbb{R}$ zadano s

$$n(v) := \sqrt{\langle v \,|\, v \rangle}$$

norma na V.

b) (4 boda) Postoje li vektori a, b, c u kompleksnom unitarnom prostoru $\mathbb{C}^3$ takvi da je

$$G(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2+i \\ 0 & 3 & 0 \\ 2-i & 0 & 4 \end{bmatrix}?$$

Obrazložite odgovor.

Rješenje.

a) Rješenje se nalazi u udžbeniku https://web.math.pmf.unizg.hr/ fran/LA-udzbenik.pdf (propozicija 5. 3. 2.)

b) Ukoliko bi takvi vektori postojali, onda bi vrijedilo

$$\langle a \,|\, a \rangle = 1,\ \langle c \,|\, c \rangle = 4,\ \langle a \,|\, c \rangle = 2 + i.$$

Prema CSB nejednakosti vrijedi

$$|\langle a \,|\, c \rangle| \leq ||a|| \cdot ||c||,$$

odnosno

$$|2 + i| \leq 1 \cdot 2 = 2,$$

tj. $\sqrt{5} \leq 2$, što nije istina. Dakle, ne postoje vektori a, b, c s traženim svojstvima.