LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi ispitni rok – 27. siječnja 2025.

Zadatak 1. (20 bodova) Odredite sve parametre $\alpha \in \mathbb{R}$ za koje je preslikavanje $s : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ zadano s

$$s(x, y) = x_1\overline{y_1} + \alpha x_1\overline{y_2} + (1-\alpha)x_2\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$$

skalarni produkt na $\mathbb{C}^2$. Za sve dobivene α ortonormirajte skup $\{(1, 0), (0, 2)\}$ s obzirom na taj skalarni produkt.

Rješenje. Jedno od svojstava koje preslikavanje s mora zadovoljavati da bi bilo skalarni produkt je $s(y, x) = \overline{s(x, y)}$ za sve $x, y \in \mathbb{C}^2$. Uočimo da je $s(y, x) = \overline{s(x, y)}$ ako i samo ako vrijedi

$$\begin{aligned} &y_1\overline{x_1} + \alpha y_1\overline{x_2} + (1-\alpha)y_2\overline{x_1} + y_2\overline{x_2} \\ =&\overline{x_1}y_1 + \alpha\overline{x_1}y_2 + (1-\alpha)\overline{x_2}y_1 + \overline{x_2}y_2, \end{aligned}$$

odnosno ako i samo ako je

$$\alpha(\overline{x_1}y_2 - y_1\overline{x_2}) + (1-\alpha)(\overline{x_2}y_1 - y_2\overline{x_1}) = 0,$$

tj. ako i samo ako je

$$(\overline{x_1}y_2 - y_1\overline{x_2})(2\alpha - 1) = 0.$$

Da bi posljednja jednakost vrijedila za sve $x, y \in \mathbb{R}^3$, nužno je $2\alpha - 1 = 0$. Ukoliko bi vrijedilo $2\alpha - 1 \neq 0$, onda, da bi vrijedilo $s(y, x) = \overline{s(x, y)}$ za sve $x, y \in \mathbb{C}^2$, mora biti $\overline{x_1}y_2 - y_1\overline{x_2} = 0$ za sve $x, y \in \mathbb{C}^2$, a to očito nije istina (uzmimo npr. $x = (1, 1), y = (1, 0)$). Dakle, da bi s uopće imao šansu biti skalarni produkt, mora vrijediti $2\alpha - 1 = 0$, odnosno $\alpha = \frac{1}{2}$.

Za $\alpha = \frac{1}{2}$, imamo

$$s(x, y) = x_1\overline{y_1} + \frac{1}{2}x_1\overline{y_2} + \frac{1}{2}x_2\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} s(x, x) &= x_1\overline{x_1} + \frac{1}{2}x_1\overline{x_2} + \frac{1}{2}x_2\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} \\ &= |x_1|^2 + \frac{1}{2}x_1\overline{x_2} + \frac{1}{2}\overline{x_1\overline{x_2}} + |x_2|^2 \\ &= |x_1|^2 + \frac{1}{2}2\mathrm{Re}(x_1\overline{x_2}) + |x_2|^2 \\ &= |x_1|^2 + \mathrm{Re}(x_1\overline{x_2}) + |x_2|^2 \\ &\geq |x_1|^2 - |x_1\overline{x_2}| + |x_2|^2 \\ &= |x_1|^2 - |x_1||x_2| + |x_2|^2 \\ &= \left(|x_1| - \frac{1}{2}|x_2|\right)^2 + \frac{3}{4}|x_2|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

i vrijedi $s(x,x)=0$ ako i samo ako je

$$|x_1|-\frac{1}{2}|x_2|=|x_2|=0,$$

te $\mathrm{Re}(x_1\overline{x_2})=-|x_1\overline{x_2}|$, tj. ako i samo ako je $x_1=x_2=0$. Dakle, za $\alpha=\frac{1}{2}$, preslikavanje s zadovoljava i svojstvo pozitivne definitnosti i svojstvo hermitske simetričnosti. Lagano se provjeri da u tim slučajevima s zadovoljava i svojstvo homogenosti i aditivnosti (taj dio prepuštamo čitatelju).

Dakle, s je skalarni produkt ako i samo ako je $\alpha=\frac{1}{2}$.

Zadatak 2. (16 bodova) Zadane su točke $T_1 = (3,3)$, $T_2 = (-1,5)$, $T_3 = (-2,-5)$. Koristeći ortogonalnu projekciju, odredite pravac $y = kx + l$ za kojeg je izraz

$$\sum_{i=1}^{3} (y_i - (kx_i + l))^2$$

najmanji. Pri tome su (x_i, y_i) koordinate točke T_i za $i \in \{1,2,3\}$.

Rješenje. Želimo minimizirati izraz

$$f(k,l) = \sum_{i=1}^{3} (y_i - (kx_i + l))^2 = (3 - (3k + l))^2 + (5 - (-k + l))^2 + (-5 - (-2k + l))^2.$$

Uočio da je $f(k,l) = d((3,5,-5),(3k+l,-k+l,-2k+l))^2$. Stavimo li

$$M = \{(3k+l,-k+l,-2k+l) \,:\, k,l \in \mathbb{R}\} = \{k(3,-1,-2) + l(1,1,1) \,:\, k,l \in \mathbb{R}\},$$

vidimo da je $M = [\{(3,-1,-2),(1,1,1)\}]$ pa je $\min_{k,l\in\mathbb{R}} f(k,l) = d((3,5,-5),M)^2$. Znamo da je $d((3,5,-5),M) = d(b,b_M)$, gdje je $b = (3,5,-5)$. Stavimo $a_1 = (3,-1,-2), a_2 = (1,1,1)$. Ortonormiranjem dobivamo vektore $e_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(3,-1,-2)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Sada je

$$b_M = \langle b \,|\, e_1 \rangle e_1 + \langle b \,|\, e_2 \rangle e_2 = \frac{14}{14}(3,-1,-2) + \frac{3}{3}(1,1,1) = a_1 + a_2.$$

Taj minimum se dostiže za $k = 1$ i $l = 1$, odnosno, pravac koji najbolje aproksimira točke $T_1 = (3,3)$, $T_2 = (-1,5)$, $T_3 = (-2,-5)$ je pravac s jednadžbom $y = x + 1$.

Zadatak 3. (20 bodova) Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormirana baza prostora $V^3(O)$ i neka je $S : V^3(O) \longrightarrow V^3(O)$ operator koji vektor prvo projicira na ravninu s jednadžbom $y - 3z = 0$, a potom njegovu sliku rotira za kut od 90° oko osi z.

(a) (12 bodova) Operatoru S odredite matrični prikaz u ortonormiranoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

(b) (8 bodova) Odredite jezgru operatora S. Je li S monomorfizam? Obrazložite odgovor.

Rješenje.

(a) Označimo s P linearni operator projekcije na ravninu s jednadžbom $y - 3z = 0$, a s R operator rotacije za kut od 90° oko osi z. Koristeći formule izvedene na vježbama, imamo $P(\vec{v}) = \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{n}$, gdje je $\vec{n}$ jedinični vektor normale ravnine s jednadžbom $y - 3z = 0$, odnosno $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{10}}(\vec{j} - 3\vec{k})$. Sada je

$$\begin{aligned}
P(\vec{i}) &= \vec{i} - (\vec{i} \cdot \vec{n})\vec{n} = \vec{i} \\
P(\vec{j}) &= \vec{j} - (\vec{j} \cdot \vec{n})\vec{n} = \vec{j} - \frac{1}{10}(\vec{j} - 3\vec{k}) = \frac{9}{10}\vec{j} + \frac{3}{10}\vec{k} \\
P(\vec{k}) &= \vec{k} - (\vec{k} \cdot \vec{n})\vec{n} = \vec{k} - \frac{-3}{10}(\vec{j} - 3\vec{k}) = \frac{3}{10}\vec{j} + \frac{1}{10}\vec{k},
\end{aligned}$$

odnosno

$$[P]_{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

Matrični prikaz rotacije je

$$[R]_{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

jer je $R(\vec{i}) = \vec{j}$, $R(\vec{j}) = -\vec{i}$, $R(\vec{k}) = \vec{k}$. Istu matricu možemo dobiti i uvrštavajući kut od 90° u formulu izvedenu na vježbama. Sada je

$$[S]_{(e)} = [R \circ P]_{(e)} = [R]_{(e)}[P]_{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{9}{10} & -\frac{3}{10} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

(b) Jezgru operatora možemo odrediti računski iz definicije jezgre, rješavajući homogeni sustav jednadžbi, a možemo i uz vrlo malo računa, na sljedeći način.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(S) &= \{\vec{v} \in V^3(0) : S(\vec{v}) = \vec{0}\} = \{\vec{v} \in V^3(0) : R(P(\vec{v})) = \vec{0}\} \\
&= \{\vec{v} \in V^3(0) : P(\vec{v}) \in \mathrm{Ker}R = \{\vec{0}\}\} = \mathrm{Ker}P.
\end{aligned}$$

Vektor $\vec{v}$ je u $\mathrm{Ker}P$ ako i samo ako je $\vec{v}$ kolinearan s vektorom $\vec{n}$ (jer je to vektor smjera pravca normale zadane ravnine). Stoga je $\mathrm{Ker}(S) = [\{\vec{j} - 3\vec{k}\}] \neq \{\vec{0}\}$ pa S nije monomorfizam.

Zadatak 4. (24 boda)

a) (20 bodova) Linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadan je svojom matricom u kanonskoj bazi

$$[A]_{(e)} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore linearnog operatora A te algebarske i geometrijske kratnosti svojstvenih vrijednosti. Može li se operator A dijagonalizirati? Ako se može dijagonalizirati, odredite $[A]_{(e)}^{2025}$.

b) (4 boda) Postoji li baza (e') od $\mathbb{R}^3$ takva da je

$$[A]_{(e')} = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 2 & \frac{-1-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}?$$

Obrazložite odgovor.

Rješenje.

(a) Karakteristični polinom operatora A je

$$k_A(\lambda) = \det([A]_{(e)} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & -2 \\ 2 & -3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2,$$

odakle slijedi da je $\sigma(A) = \{1, -1\}$, $a(1) = 2$, $a(-1) = 1$. Odredimo sada svojstvene potprostore.

$\boxed{V_A(-1)}$ Rješavamo $([A]_{(e)} - (-1) \cdot I)x = 0$ i dobivamo $V_A(-1) = [\{(1,1,0)\}]$. Dakle, $g(-1) = 1$.

$\boxed{V_A(1)}$ Rješavamo $([A]_{(e)} - I)x = 0$ i dobivamo $V_A(1) = [\{(1,0,1),(0,1,-2)\}]$. Dakle, $g(1) = 2$.

Kako je $a(1) = g(1), a(-1) = g(-1)$ i $a(1) + a(-1) = \dim \mathbb{R}^3$, zaključujemo da se operator A može dijagonalizirati. Odaberimo bazu (a) koja se sastoji od svojstvenih vektora,

$$(a) = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,-2)\}.$$

Vrijedi

$$[A]_{(a)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stoga je

$$
\begin{aligned}
[A]_{(e)}^{2025} &= ([I]_{(e,a)}[A]_{(a)}[I]_{(e,a)}^{-1})^{2025} = [I]_{(e,a)}[A]_{(a)}^{2025}[I]_{(e,a)}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

(b) Ukoliko postoji takva baza (e'), onda su $[A]_e$ i $[A]_{e'}$ slične matrice pa te matrice moraju imati isti rang, trag, determinatnu i karakteristični polinom (ovo su nužni, ne i dovoljni uvjeti). Iako im se rang, trag i determinanta podudaraju, matrice ipak nisu slične jer je

$$
k_{[A]_{(e)}}(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2,\ k_{[A]_{(e')}}(\lambda) = -\left(\lambda - \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)(\lambda-2)
$$

pa je $k_{[A]_{(e)}}(\lambda) \neq k_{[A]_{(e')}}(\lambda)$, što znači da matrice $[A]_{(e)}$ i $[A]_{(e')}$ nisu slične.

Zadatak 5. (20 bodova)

(a) (14 bodova) Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor i neka je $L \leq V$. Definirajte ortogonalnu projekciju vektora $x \in V$ na potprostor L. Dana je ortonormirana baza $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ vektorskog potprostora L. Dokažite da je ortogonalna projekcija vektora $x \in V$ na potprostor L dana s

$$x_L = \sum_{i=1}^{k} \langle x \mid e_i \rangle e_i$$

i dokažite da je $d(x, L) = d(x, x_L)$.

(b) (6 bodova) Može li linearni operator $B : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^3$ biti epimorfizam? Može li biti monomorfizam? Ako može, nađite primjer takvog operatora. Obrazložite odgovore.

Rješenje.

(a) Vidjeti predavanja.

(b) Ako je B epimorfizam, onda je $r(B) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ pa je po teoremu o rangu i defektu $d(B) = \dim \mathcal{P}_1 - r(B) = 2 - 3 = -1$, što nije moguće pa B ne može biti epimorfizam.

S druge strane, B može biti monomorfizam, npr.

$$B(at + b) = (a, b, 0),\ a, b \in \mathbb{R}$$

je monomorfizam iz $\mathcal{P}_1$ u $\mathbb{R}^3$.