LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi ispitni rok – 10. veljače 2025.

Zadatak 1. (20 bodova)

a) (15 bodova) Dokažite da je preslikavanje $s : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ zadano s

$$s(x,y) = 2x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \frac{1}{2}x_2\overline{y_3} + \frac{1}{2}x_3\overline{y_2} + x_3\overline{y_3}$$

skalarni produkt na $\mathbb{C}^3$. Ortonormirajte skup $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ s obzirom na taj skalarni produkt.

b) (5 bodova) Zadan je linearni funkcional $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ sa $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 - x_2 + x_3$. Pronađite vektor $a = (a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{C}^3$ tako da je $f(x) = s(x,a)$ za sve $x \in \mathbb{C}^3$.

Rješenje.

a) Provjerimo pozitivnu definitnost. Imamo

$$\begin{aligned}
s(x,x) &= 2x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + \frac{1}{2}x_2\overline{x_3} + \frac{1}{2}x_3\overline{x_2} + x_3\overline{x_3} \\
&= 2|x_1|^2 + |x_2|^2 + \frac{1}{2}x_2\overline{x_3} + \frac{1}{2}\overline{x_2\overline{x_3}} + |x_3|^2 \\
&= 2|x_1|^2 + |x_2|^2 + \frac{1}{2}2\mathrm{Re}(x_2\overline{x_3}) + |x_3|^2 \\
&= 2|x_1|^2 + |x_2|^2 + \mathrm{Re}(x_2\overline{x_3}) + |x_3|^2 \\
&\geq 2|x_1|^2 + |x_2|^2 - |x_2\overline{x_3}| + |x_3|^2 \\
&= 2|x_1|^2 + |x_2|^2 - |x_2||x_3| + |x_3|^2 \\
&= 2|x_1|^2 + \left(|x_2| - \frac{1}{2}|x_3|\right)^2 + \frac{3}{4}|x_3|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

i vrijedi $s(x,x) = 0$ ako i samo ako je

$$|x_1| = |x_2| - \frac{1}{2}|x_3| = |x_3| = 0,$$

te $\mathrm{Re}(x_2\overline{x_3}) = -|x_2\overline{x_3}|$, tj. ako i samo ako je $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Dokažimo hermitsku simetričnost, tj. da je $s(y,x) = \overline{s(x,y)}$ za sve $x,y \in \mathbb{C}^3$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\overline{s(x,y)} &= \overline{2x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \frac{1}{2}x_2\overline{y_3} + \frac{1}{2}x_3\overline{y_2} + x_3\overline{y_3}} \\
&= 2y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2} + \frac{1}{2}y_3\overline{x_2} + \frac{1}{2}y_2\overline{x_3} + y_3\overline{x_3} \\
&= 2y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2} + \frac{1}{2}y_2\overline{x_3} + \frac{1}{2}y_3\overline{x_2} + y_3\overline{x_3} = s(y,x).
\end{aligned}$$

Lagano se provjeri da s zadovoljava i svojstvo homogenosti i aditivnosti (taj dio prepuštamo čitatelju).

Ortonormirajmo skup $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ s obzirom na taj skalarni produkt. Vrijedi $s((0,1,0),(0,1,0)) = 1$ pa je

$$e_1 = \frac{(0,1,0)}{1} = (0,1,0).$$

Dalje imamo

$$\begin{aligned} b_2 &= (0,0,1) - s((0,0,1),(0,1,0))(0,1,0) \\ &= (0,0,1) - \frac{1}{2}(0,1,0) = \left(0,-\frac{1}{2},1\right), \end{aligned}$$

Dalje imamo $s((0,-\frac{1}{2},1),(0,-\frac{1}{2},1)) = \frac{3}{4}$, odnosno $e_2 = \frac{b_2}{||b_2||} = \frac{2}{\sqrt{3}}(0,-\frac{1}{2},1)$.

b) Vrijedi

$$\begin{aligned} s((1,0,0),(a_1,a_2,a_3)) &= f(1,0,0) = 1 \\ s((0,1,0),(a_1,a_2,a_3)) &= f(0,1,0) = -1 \\ s((0,0,1),(a_1,a_2,a_3)) &= f(0,0,1) = 1, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} 2\overline{a_1} &= f(1,0,0) = 1 \\ \overline{a_2} + \frac{1}{2}\overline{a_3} &= f(0,1,0) = -1 \\ \frac{1}{2}\overline{a_2} + \overline{a_3} &= f(0,0,1) = 1, \end{aligned}$$

odakle slijedi $a = \left(\frac{1}{2},-2,2\right)$.

Zadatak 2. (20 bodova)

a) (5 bodova) Odredite ortogonalni komplement potprostora

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : c + d = 0, a - 2b + 3c + d = 0 \right\}$$

u prostoru $M_2(\mathbb{R})$ s obzirom na standardni skalarni produkt.

b) (15 bodova) Odredite udaljenost vektora $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ od potprostora M.

Rješenje.

a) Uočimo da je

$$\begin{aligned} M &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0, \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \right\} \\ &= \left[\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right]^{\perp} \end{aligned}$$

pa je $M^{\perp} = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right]$.

b) Najprije ćemo odrediti jednu ortonormiranu bazu za $M^{\perp}$. Uočimo da je

$$M^{\perp} = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right] = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right] = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right].$$

Gram-Schmidtov postupak daje

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}{\left|\left| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right|\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ B_2 &= A_2 - \langle A_2 | E_1 \rangle E_1 = A_2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ E_2 &= \frac{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}{\left|\left| \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right|\right|} = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vrijedi $d(X, M) = ||X_M^{\perp}||$, gdje je $X_M^{\perp} = \langle X | E_1 \rangle E_1 + \langle X | E_2 \rangle E_2 = \frac{-2}{7} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ pa je $d(X, M) = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

Zadatak 3. (20 bodova) Neka je $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ ortonormirana baza prostora $V^3(O)$ i neka je $S : V^3(O) \longrightarrow V^3(O)$ operator koji vektor prvo projicira na ravninu s jednadžbom $x-3y=0$, a potom njegovu sliku zrcali s obzirom na pravac $y=z$ u yz–ravnini.

(a) (12 bodova) Operatoru S odredite matrični prikaz u ortonormiranoj bazi $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.

(b) (8 bodova) Odredite jezgru i sliku operatora S. Je li S monomorfizam? Je li epimorfizam? Obrazložite odgovor.

Rješenje.

(a) Označimo s P linearni operator projekcije na ravninu s jednadžbom $x-3y=0$. Koristeći formule izvedene na vježbama, imamo $P(\vec{v}) = \vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{n})\vec{n}$, gdje je $\vec{n}$ jedinični vektor normale ravnine s jednadžbom $x-3y=0$, odnosno $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{10}}(\vec{i}-3\vec{j})$. Sada je

$$\begin{aligned}
P(\vec{i}) &= \vec{i} - (\vec{i}\cdot\vec{n})\vec{n} = \vec{i} - \frac{1}{10}(\vec{i}-3\vec{j}) = \frac{9}{10}\vec{i} + \frac{3}{10}\vec{j} \\
P(\vec{j}) &= \vec{j} - (\vec{j}\cdot\vec{n})\vec{n} = \vec{j} - \frac{-3}{10}(\vec{i}-3\vec{j}) = \frac{3}{10}\vec{i} + \frac{1}{10}\vec{j} \\
P(\vec{k}) &= \vec{k} - (\vec{k}\cdot\vec{n})\vec{n} = \vec{k},
\end{aligned}$$

odnosno

$$[P]_{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

I drugi dio zadatka se može riješiti koristeći formule koje smo izveli na nastavi, ali ćemo pokazati pristup u kojem koristimo matrice prijelaza. Označimo sa Z zrcaljenje s obzirom na pravac $y=z$ u yz–ravnini, tj. pravac s jednadžbom $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$, odnosno vektorom smjera $\vec{j}+\vec{k}$. Uočimo da je to vektor normale ravnine s jednadžbom $y+z=0$ i operator Z svaki vektor $\vec{v}$ te ravnine preslikava u vektor $-\vec{v}$. Odaberimo bazu $(a) = \{\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}\}$, gdje je $\vec{a_1}=\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{a_2}=\vec{i}$, $\vec{a_3}=\vec{j}-\vec{k}$. Tada je $Z(\vec{a_1})=\vec{a_1}$, $Z(\vec{a_2})=-\vec{a_2}$, $Z(\vec{a_3})=-\vec{a_3}$ (jer vektori $\vec{a_2}$ i $\vec{a_3}$ leže u ravnini s jednadžbom $y+z=0$) pa je

$$[Z]_{(a)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Iz toga slijedi

$$[Z]_{(e)} = [I]_{(e,a)}[Z]_{(a)}[I]_{(a,e)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Do ove matrice smo mogli doći na još jedan (lakši) način, budući da je riječ o zrcaljenju s obzirom na pravac $y = z$ u yz–ravnini. Naime, vrijedi $Z(\vec{i}) = -\vec{i}$ jer je vektor $\vec{i}$ okomit na pravac $y = z$ u yz–ravnini. Dalje, vrijedi $Z(\vec{j}) = \vec{k}, Z(\vec{k}) = \vec{j}$ jer zrcalimo s obzirom na pravac $y = z$ u yz–ravnini. Sada je

$$[S]_{(e)} = [Z \circ P]_{(e)} = [Z]_{(e)}[P]_{(e)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{10} & -\frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Jezgru operatora možemo odrediti računski iz definicije jezgre, rješavajući homogeni sustav jednadžbi, a možemo i uz vrlo malo računa, na sljedeći način.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(S) &= \{\vec{v} \in V^3(0) : S(\vec{v}) = \vec{0}\} = \{\vec{v} \in V^3(0) : Z(P(\vec{v})) = \vec{0}\} \\ &= \{\vec{v} \in V^3(0) : P(\vec{v}) \in \mathrm{Ker}Z = \{\vec{0}\}\} = \mathrm{Ker}P. \end{aligned}$$

Vektor $\vec{v}$ je u $\mathrm{Ker}P$ ako i samo ako je $\vec{v}$ kolinearan s vektorom $\vec{n}$ (jer je to vektor smjera pravca normale zadane ravnine). Stoga je $\mathrm{Ker}(S) = [\{\vec{i} - 3\vec{j}\}] \neq \{\vec{0}\}$, što znači da je $d(S) = 1$, a onda je $r(S) = 3 - 1 = 2$, odnosno S nije ni monomorfizam ni epimorfizam. Još moramo odrediti sliku od S. Vrijedi

$$\mathrm{Im}(S) = [\{S(\vec{i}), S(\vec{j}), S(\vec{k})\}] = \left[\left\{\frac{3}{10}\left(-3\vec{i} + \vec{k}\right), \frac{1}{10}\left(-3\vec{i} + \vec{k}\right), \vec{j}\right\}\right] = [\{-3\vec{i} + \vec{k}, \vec{j}\}]$$

Zadatak 4. (20 bodova) Linearni operator $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zadan je svojom matricom u kanonskoj bazi

$$[A]_{(e)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore linearnog operatora A te algebarske i geometrijske kratnosti svojstvenih vrijednosti. Može li se operator A dijagonalizirati? Ako se može dijagonalizirati, odredite $[A]_{(e)}^{100}$.

Rješenje. Karakteristični polinom operatora A je

$$k_A(\lambda) = \det([A]_{(e)} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-1)\lambda,$$

odakle slijedi da je $\sigma(A) = \{0, 1, -1\}$, $a(0) = 1, a(1) = 1$, $a(-1) = 2$. Odredimo sada svojstvene potprostore.

$\boxed{V_A(-1)}$ Rješavamo $([A]_{(e)} - (-1) \cdot I)x = 0$ i dobivamo $V_A(-1) = [\{(1,0,0,0), (0,0,0,1)\}]$. Dakle, $g(-1) = 2$.

$\boxed{V_A(1)}$ Rješavamo $([A]_{(e)} - I)x = 0$ i dobivamo $V_A(1) = [\{(0,0,1,1)\}]$. Dakle, $g(1) = 1$.

$\boxed{V_A(0)}$ Rješavamo $([A]_{(e)} - 0 \cdot I)x = 0$ i dobivamo $V_A(0) = [\{(1,1,0,0)\}]$. Dakle, $g(0) = 1$.

Kako je $a(1) = g(1), a(-1) = g(-1), a(0) = g(0)$ i $a(1)+a(-1)+a(0) = \dim \mathbb{R}^4$, zaključujemo da se operator A može dijagonalizirati. Odaberimo bazu (a) koja se sastoji od svojstvenih vektora,

$$(a) = \{(1,1,0,0), (0,0,1,1), (1,0,0,0), (0,0,0,1)\}.$$

Vrijedi

$$[A]_{(a)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
[A]_{(e)}^{100} &= ([I]_{(e,a)}[A]_{(a)}[I]_{(e,a)}^{-1})^{100} = [I]_{(e,a)}[A]_{(a)}^{100}[I]_{(e,a)}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Zadatak 5. (20 bodova)

a) (5 bodova) Neka je V unitarni prostor i $\{e_1, \ldots, e_n\}$ njegova ortonormirana baza. Za vektor $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ izrazite koeficijente λ_i pomoću x i vektora zadane baze. Obrazložite odgovor.

b) (5 bodova) Neka je $A \in L(\mathcal{P}_3, M_2(\mathbb{R}))$. Dokažite tvrdnju: A je monomorfizam ako i samo ako je epimorfizam.

c) (5 bodova) Zadane su baze $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $(e') = \{e_1^{'}, \ldots, e_n^{'}\}$ vektorskog prostora V. Definirajte matricu prijelaza iz baze (e) u bazu (e'). Kako je ta matrica povezana s matricom prijelaza iz baze (e') u bazu (e)? Obrazložite.

d) (5 bodova) Neka je A linearni operator na vektorskom prostoru V nad poljem $\mathbb{F}$, $A \in L(V)$. Definirajte svojstvenu vrijednost operatora A. Ako je V konačnodimenzionalan prostor, dokažite da je svaka svojstvena vrijednost od A nultočka karakterističnog polinoma operatora A.

Rješenje.

a) Vidjeti predavanja.

b) Ako je A epimorfizam, onda je $r(A) = \dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$ pa je po teoremu o rangu i defektu $d(A) = \dim\mathcal{P}_3 - r(A) = 4 - 4 = 0$ pa je A monomorfizam.

Obratno, ako je A monomorfizam, onda je $d(A) = 0$ pa je po teoremu o rangu i defektu $r(A) = \dim\mathcal{P}_3 - d(A) = 4 - 0 = 4 = \dim M_2(\mathbb{R})$, pa je A epimorfizam.

c) Vidjeti predavanja.

d) Vidjeti predavanja.