Linearna algebra 2, 2022./2023.

4. domaća zadaća

1. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Koristeći Rieszov teorem o reprezentaciji linearnog funkcionala dokažite da postoji polinom $p_0 \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ takav da za svaki $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ vrijedi

$$\int_0^1 p(x)p_0(x)dx = p(5).$$

   Odredite taj polinom za slučaj $n = 1$.

2. Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor i $A \in L(V)$. Dokažite da je operator $B = A^*A + I$ invertibilan te da je $\sigma(B^{-1}) \subseteq (0, 1]$.

   (Uputa: Promatrajte izraz $\langle Bx, x\rangle$.)

3. Neka je $A \in L(\mathbb{R}^4)$ linearni operator takav da je $\operatorname{Im} A = [\{(1,2,1,2),(1,0,1,0)\}]$. Odredite neku bazu za $\operatorname{Ker} A^*$.

4. Odredite neku ortogonalnu matricu $A \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ ako su njena prva dva retka jednaka

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Nađite neku ortogonalnu matricu U takvu da je $U^T AU$ dijagonalna matrica ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$