LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi ispitni rok - 14. veljače 2025.

ZADATAK 1

Neka je $M \leq M_2(\mathbb{R})$ vektorski potprostor realnih matrica koje komutiraju s matricom $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Odredite dimenziju potprostora M te jednu njegovu bazu.

(b) Odredite jedan direktni komplement od M u $M_2(\mathbb{R})$.

(c) Neka je L dobiveni direktni komplement. Odredite rastav proizvoljne matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$ s obzirom na rastav $M_2(\mathbb{R}) = M \dot{+} L$.

Rješenje:

(a) Neka je $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M$ proizvoljna. Tada iz $AB = BA$ slijedi

$$\begin{aligned} 5x - z &= 5x + 6y \\ 6x + 2z &= 5z + 6t \\ 5y - t &= -x + 2y \\ 6y + 2t &= -z + 2t. \end{aligned}$$

Rješenje sustava je $z = -6y$, $x = -3y + t$, odakle je

$$B = \begin{bmatrix} -3y + t & y \\ -6y & t \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

S obzirom da je skup $\left\{ \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ nezavisan i sustav izvodnica, onda je i baza pa je $\dim M = 2$.

(b) Nadopunimo bazu za M do baze za cijeli $M_2(\mathbb{R})$ kako bi našli bazu za direktni komplent. Jedna dopuna je dana s

$$\{E_{11}, E_{12}\},$$

Pa je jedan direktni komplement dan s

$$L = [\{E_{11}, E_{12}\}].$$

(c) Za traženi rastav potrebno je odrediti zapis proizvoljne matrice $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ u bazi $\left\{ \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{11}, E_{12} \right\}$, što se svodi na rješavanje sustava

$$\begin{aligned} x &= -3\alpha + \beta + \gamma \\ y &= \alpha + \delta \\ z &= -6\alpha \\ t &= \beta. \end{aligned}$$

Rješenje sustava je $\alpha = -\frac{1}{6}z, \beta = t, \gamma = x - \frac{1}{2}z - t, \delta = y + \frac{1}{6}z$. Dakle, zapis od $B = B_M + B_L$ s obzirom na rastav $M \dot{+} L$ dan je s

$$B = \underbrace{-\frac{1}{6}z \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=B_M} + \underbrace{(x - \frac{1}{2}z - t)E_{11} + (y + \frac{1}{6}z)E_{12}}_{=B_L}.$$

ZADATAK 2

(a) (12 bodova) Dani su vektori $a_1 = (3,2,6), a_2 = (7,3,9), a_3 = (5,1,3)$ te $b = (\lambda, 2, 5)$. Odredite sve $\lambda \in \mathbb{R}$ takve da vrijedi $[\{a_1, a_2, a_3\}] \neq [\{a_1, a_2, a_3, b\}]$.

(b) (8 bodova) Neka su matrice $A, B, C \in M_n$ takve da je C regularna. Dokažite sljedeću tvrdnju: ako je $A \sim B$, tada je $AC \sim BC$.

Rješenje:

(a) S obzirom da je tražena tvrdnja ekvivalentna s $b \notin [\{a_1, a_2, a_3\}]$, dovoljno je provjeriti za koje $\lambda \in \mathbb{R}$ imamo $r\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}\right) < r\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \end{bmatrix}\right)$, za što se standardnim načinom pokaže da vrijedi za sve $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) S obzirom da regularne matrice čuvaju rang pri množenju, imamo

$$r(AC) = r(A) \overset{A \sim B}{=} r(B) = r(BC),$$

odnosno $AC \sim BC$.

$\boxed{\text{ZADATAK 3}}$

(a) Izračunajte determinantu

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}.$$

(b) Neka su A i B regularne matrice. Dokažite da vrijedi

$$A^{-1}(A+B)B^{-1} = A^{-1} + B^{-1}.$$

Rješenje:

(a)

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix} = \substack{\text{zadnji stupac pomnožen s -1} \\ \text{dodajemo svim ostalima}} = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & 0 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix}$$

$$= \substack{\text{razvijemo} \\ \text{po zadnjem retku}} = (-1)^{n+n} n \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = n(1-n)(2-n)\dots(-1)$$

$$= (-1)^{n-1} n!.$$

(b) Računamo

$$\begin{aligned} A^{-1}(A+B)B^{-1} &= (\text{desna distributivnost}) = (A^{-1}A + A^{-1}B)B^{-1} \\ &= (I + A^{-1}B)B^{-1} = (\text{lijeva distributivnost}) = B^{-1} + A^{-1}BB^{-1} \\ &= B^{-1} + A^{-1}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{ZADATAK 4}}$

(20 bodova) Riješite sustav:

$$\begin{cases} x_1 & & & & & + & \lambda x_4 & = & \lambda \\ & & (\lambda+2)x_2 & - & (\lambda+2)x_3 & + & x_4 & = & \lambda+3 \\ -x_1 & - & \lambda x_2 & + & (\lambda+1)x_3 & + & \lambda x_4 & = & -\lambda-1 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & (\lambda+2)x_4 & = & 0 \end{cases}$$

za svaki parametar $\lambda \in \mathbb{R}$, za koji je skup rješenja pripadnog sustava beskonačan.

Rješenje:

Sustav će biti Cramerov i imati jedinstveno rješenje ako je matrica sustava A regularna. Računamo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda+2 & -(\lambda+2) & 1 \\ -1 & -\lambda & \lambda+1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+3).$$

Dakle, sustav će imati jedinstveno rješenje za $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -3\}$. Preostaje pronaći rješenje u slučajevima $\lambda = -1$ i $\lambda = -3$.

Proširena matrica sustava je

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda & : & \lambda \\ 0 & \lambda+2 & -(\lambda+2) & 1 & : & \lambda+3 \\ -1 & -\lambda & \lambda+1 & \lambda & : & -\lambda-1 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda+2 & : & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda & : & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & \lambda+2 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda^2+4\lambda & : & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^2-4\lambda-3 & : & \lambda+3 \end{bmatrix}$$

- Slučaj $\lambda = -1$.

$$A_p \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & : & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & : & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 2 \end{bmatrix}$$

  Vidimo da je zadnji redak matrice A nul-redak, ali zadnji redak matrice A_p nije nul-redak, pa ovaj slučaj nema rješenja.

- Slučaj $\lambda = -3$.

$$A_p \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & : & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & : & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

  U ovom slučaju rješenje je $x = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{ZADATAK 5}}$

(a) (12 bodova) Neka su $\mathcal{S}$ i L potprostori od M_2, vektorskog prostora matrica reda 2, pri čemu je $\mathcal{S}$ potprostor simetričnih matrica, a L neki potprostor dimenzije 2. Dokažite da je $\dim(L \cap \mathcal{S}) \geq 1$.

(b) (8 bodova) Neka je $A \in M_{mn}$ matrica ranga m. Dokažite da za svaki $B \in M_{m1}$ sustav

$$AX = B$$

ima rješenje.

Rješenje:

(a) Na vježbama i predavanjima je pokazano da je $\dim(\mathcal{S}) = 3$, a kako je $L + \mathcal{S} \leq M_2$ imamo $\dim(L + \mathcal{S}) \leq 4$. Sada je

$$\dim(L \cap \mathcal{S}) = \dim(L) + \dim(\mathcal{S}) - \dim(L + \mathcal{S}) = 3 + 2 - \dim(L + \mathcal{S}) \geq 5 - 4 = 1$$

(b) Neka je matrica A $M_{m,n}$ prikazana pomoću stupaca $A = [S_1, \ldots, S_n]$. Tada je proširena matrica sustava A_P iz $M_{m,n+1}$ prikazana kao $A_P = [S_1, \ldots, S_n, B]$. Uočimo: $S_1, \ldots, S_n, B \in M_{m,1}$, te $\dim M_{m,1} = m$. Imamo

$$m = r(A) = \dim[\{S_1, \ldots, S_n\}] \leq \dim[\{S_1, \ldots, S_n, B\}] \leq m$$

Dakle $r(A) = r(A_P)$, pa po teoremu Kronecker-Capelli sustav ima rješenje.