LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi kolokvij - 16. lipnja 2025.

ZADATAK 1

Zadano je bilinearno preslikavanje $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s

$$b((x,y),(x',y')) = \alpha x x' + 4\sqrt{3}xy' + 4\sqrt{3}x'y + \delta y y',$$

pri čemu su $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$.

(a) (5 bodova) Postoje li $\alpha, \delta \in \mathbb{Z}$ takvi da je $\alpha\delta \leq 50$ i da je s b dan skalarni produkt na $\mathbb{R}^2$? Ako postoje, odredite sve takve, u suprotnom pokažite da ne postoje.

(b) (5 bodova) Neka su sada $\alpha = 0$ i $\delta = -8$. Dana je krivulja drugog reda jednadžbom

$$b((x,y),(x,y)) - 4\sqrt{3}x - 4y = -5.$$

Odredite kojeg je tipa ta krivulja, te koordinatni sustav u kojem ona poprima kanonski oblik (dovoljno je samo opisati kako je taj koordinatni sustav dobiven iz polaznog).

Rješenje:

(a) Dana bilinearna forma b se može zapisati kao $b((x,y),(x',y')) = \langle A(x,y),(x',y')\rangle$, gdje je $A = \begin{bmatrix} \alpha & 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & \delta \end{bmatrix}$. Stoga će b definirati skalarni produkt ako i samo ako je A simetrična te pripadna kvadratna forma pozitivno definitna. Vidimo da je A simetrična neovisno o α, δ, pa preostaje okarakterizirati pozitivnu definitnost; koristeći Sylvesterov kriterij vidimo da je to ekvivalentno s $\alpha > 0$ i $\alpha\delta > 48$. Uz uvjet $\alpha\delta \leq 50$, vidimo da su svi parovi $(\alpha, \delta) \in \mathbb{Z}^2$ koji to zadovoljavaju $(1,50), (50,1), (2,25), (25,2), (5,10), (10,5)$ i $(7,7)$.

(b) Danu krivulju možemo zapisati u obliku

$$\langle AX, X\rangle + \langle B, X\rangle + C = 0,$$

gdje je $A = \begin{bmatrix} 0 & 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & -8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4\sqrt{3} \\ -4 \end{bmatrix}$ te $C = 5$. Matrica se može dijagonalizirati u obliku

$$A = QDQ^T, \qquad \text{gdje je } Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}, \qquad D = \operatorname{diag}(4, -12).$$

Uvođenjem supstitucije $X' = Q^T X$ jednadžba prelazi u

$$\langle DX', X'\rangle + \langle Q^T B, X'\rangle + C = 0,$$

odnosno

$$4(x')^2 - 12(y')^2 - 8x' + 5 = 0.$$

Novom supstitucijom $X'' = X' - X_0$, gdje je $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, jednadžba postaje

$$\frac{(y'')^2}{1} - \frac{(x'')^2}{3} = 1,$$

što je jednadžba hiperbole u kanonskom obliku u koordinatnom sustavu koji je od polaznog dobiven prvo rotacijom za kut $\frac{\pi}{6}$, a zatim translacijom u dobivenom sustavu za $(1,0)$.

$\boxed{\text{ZADATAK 2}}$

(a) (5 bodova) Među svim ravninama u $\mathbb{R}^3$ oblika $z = ax + by + c$ za neke $a, b, c \in \mathbb{R}$ pronađite onu koja u smislu najmanjih kvadrata najbolje aproksimira točke

$$(x_1, y_1, z_1) = (2, 4, 9), (x_2, y_2, z_2) = (0, -7, -5), (x_3, y_3, z_3) = (-3, 2, -1), (x_4, y_4, z_4) = (2, 1, 1).$$

(b) (5 bodova) Odredite najbolju aproksimaciju vektora $(2, 1, 0)$ vektorima iz $\mathbb{R}^3$ čija je treća koordinata jednaka zbroju prve dvije.

Rješenje:

(a) Uvrštavanjem uvjeta $z_i = ax_i + by_i + c$ za $i = 1, \ldots, 4$ dobijemo sustav $AX = B$, gdje je

$$X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

S obzirom da je $r(A) = 3$, jedinstveno rješenje u smislu najmanjih kvadrata ovog sustava će biti dano s

$$X_0 = (A^T A)^{-1} A^T B.$$

Napomena: Tek nakon ispravljanja sam uočio da je jedna koordinata bila krivo prepisana (x_1 je trebao biti 1 umjesto navedenih 2), pa je umjesto planirano namještenog jednostavnog računa u kojem su stupci matrice A ortogonalni i B je takav da jednostavno ispadne $(a, b, c) = (1, 1, 1)$, ovaj posljednji dio ispao računski (pre)zahtjevan. Stoga su rješenja koja su postavila točno postavke zadatka i došla do posljednjeg koraka računanja X_0 nosila maksimalan broj bodova. Isprike svima koji su potrošili vrijeme na pokušaj eksplicitnog dobivanja (a, b, c) u ovom formatu.

(b) Označimo s $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}$. Tada je $M \leq \mathbb{R}^3$, pa će najbolja aproksimacija vektora $x = (2, 1, 0)$ biti njegova ortogonalna projekcija na M, $P_M x$. Jedna baza za M je dana s $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$, dok je ortogonalni komplement od M dan s $M^\perp = [\{(1, 1, -1)\}]$. Sada lako vidimo da se dani vektor može rastaviti kao $(2, 1, 0) = (1, 0, 1) + (1, 1, -1)$, pa je njegova ortogonalna projekcija na M, i ujedno i tražena aproksimacija, vektor $(1, 0, 1)$.

$\boxed{\text{ZADATAK 3}}$

(a) (6 bodova) Neka je $P \in L(\mathbb{R}^3)$ projektor na potprostor $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ u smjeru potprostora $L = [\{(0, 1, 0)\}]$.

- Odredite matrični zapis operatora P^* u kanonskoj bazi.
- Je li P ortogonalan projektor?

(b) (6 bodova) Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrica takva da vrijedi $A^2 = A^*$. Koje sve vrijednosti može poprimiti $\lambda \in \sigma(A)$?

Rješenje.

(a) Vrijedi:

$$M = [\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}],$$

pa je zapis projektora P u bazi $(f) = \{(1,0,-1),(0,1,-1),(0,1,0)\}$ za $\mathbb{R}^3$:

$$P(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Slijedi da je:

$$\begin{aligned} P(e) &= I(e,f)P(f)I(f,e) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Slijedi da je:

$$P^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

pa, s obzirom na to da je u ortonormiranoj bazi $P(e) \neq P^*(e)$, slijedi da P nije ortogonalan projektor.

(b) Vrijedi $AA^* = AA^2 = A^3 = A^2A = A^*A$, pa je matrica A normalna. Slijedi da postoje unitarna matrica $U \in M_n(\mathbb{C})$ i dijagonalna matrica $D \in M_n(\mathbb{C})$ takve da je $A = UDU^*$.

Dakle, $A^2 = UD^2U* = UD^*U^* = A^*$, pa je $D^2 = D^*$.

Zato je za svaku svojstvenu vrijednost $\lambda \in \sigma(A)$: $\lambda^2 = \overline{\lambda}$.

Slijedi da je $\sigma(A) \subseteq \{0, 1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$

$\boxed{\text{ZADATAK 4}}$

(8 bodova) Nađite neku ortogonalnu matricu Q takvu da je $Q^T AQ$ dijagonalna matrica ako je

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ je simetrična, pa je ortogonalno slična dijagonalnoj matrici, tj. postoje ortogonalna matrica Q i dijagonalna matrica D takve da je $A = QDQ^T$.

Vrijedi: $k_A(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda - 2)^2\lambda$, tj. $\sigma(A) = \{0, 2, 5\}$.

Pripadni svojstveni potprostori su

$$V_A(5) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V_A(2) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, V_A(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

pa, s obzirom da su vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima međusobno ortogonalni, preostaje ortonormirati svaku bazu posebno:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\text{ZADATAK 5}}$

(2+3+5 bodova) Pretpostavimo da stupci matrice $A \in M_{mn}$ čine ortonormiran skup u M_{m1}.

(a) Dokažite da je $m \geq n$.

(b) Ako je $m = n$, dokažite da je A unitarna matrica.

(c) Ako je $m > n$, dokažite da postoji matrica $B \in M_{m,m-n}$ takva da je matrica $C = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ unitarna.

Rješenje. Neka je $A = \begin{bmatrix} E_1 & \dots & E_n \end{bmatrix}$, gdje su $E_1, \dots, E_n \in M_{m,1}$ stupci matrice A.

(a) Skup $\{E_1, \dots, E_n\} \subseteq M_{m1}$ je ortonormiran, pa je linearno nezavisan u $M_{m,1}$. Broj elemenata linearno nezavisnog skupa u nekom vekorskom prostoru je najviše dimenzija tog prostora, odakle slijedi $n \leq \dim M_{m,1} = m$.

(b) Pretpostavimo da je $m = n$. Zbog $r(A) = n$ je $A \in M_n$ regularna matrica i vrijedi

$$A^*A = \begin{bmatrix} E_1^* \\ \vdots \\ E_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & \dots & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_i^* E_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle E_j, E_i \rangle \end{bmatrix} = I.$$

Dakle $A^{-1} = A^*$, pa je A unitarna matrica.

(c) Pretpostavimo da je $m > n$. Tada ortonormiran skup $\{E_1, \dots, E_n\}$ možemo proširiti do ortonormirane baze $\{E_1, \dots, E_n, E_{n+1}, \dots, E_m\}$ za $M_{m,1}$. Neka je $B \in M_{m,m-n}$ matrica kojoj su stupci redom $E_{n+1}, \dots, E_m$, da $B = \begin{bmatrix} E_{n+1} & \dots & E_m \end{bmatrix}$. Sada iz b) dijela zadatka slijedi da je matrica $C = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \in M_m$ unitarna.