LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi ispitni rok - 16. lipnja 2025.

ZADATAK 1

Neka je $A : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{C})$ preslikavanje dano s

$$A(p(t)) = \begin{bmatrix} p'(0) & p(0) \\ p'(1) & p''(1) \end{bmatrix}.$$

(a) (8 bodova) Pokažite da je A linearno preslikavanje.

(b) (10 bodova) Odredite sliku i jezgru te rang i defekt od A.

(c) (2 boda) Je li A izomorfizam?

Rješenje.

(a) Neka su $p, q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} A((\alpha p + \beta q)(t)) &= \begin{bmatrix} (\alpha p + \beta q)'(0) & (\alpha p + \beta q)(0) \\ (\alpha p + \beta q)'(1) & (\alpha p + \beta q)''(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha p'(0) + \beta q'(0) & \alpha p(0) + \beta q(0) \\ \alpha p'(1) + \beta q'(1) & \alpha p''(1) + \beta q''(1) \end{bmatrix} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} p'(0) & p(0) \\ p'(1) & p''(1) \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} q'(0) & q(0) \\ q'(1) & q''(1) \end{bmatrix} \\ &= \alpha A(p(t)) + \beta A(q(t)) \end{aligned}$$

(b) Iz $A(p(t)) = 0$ slijedi da je $p(t) = 0$, pa je $\ker(A) = \{0\}$ i $d(A) = 0$. Iz teorema o rangu i defektu je tada $r(A) = 4 - 0 = 4$.

Neka su $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = t$, $p_3(t) = t^2$ i $p_4(t) = t^3$ vektori kanonske baze za $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Računamo:

$$A(p_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A(p_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A(p_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, A(p_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},$$

pa je, zbog linearne nezavisnosti (ili ranga matrice A),

$$\mathrm{Im}(A) = \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \right]$$

(c) Preslikavanje A nije izomorfizam jer nije surjekcija, npr.

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nije u slici preslikavanja A. Uočimo, da bi preslikavanje A bilo dobro definirano, vektorski prostori $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ i $M_2(\mathbb{C})$ moraju biti definirani nad istim poljem skalara, tj. $\mathbb{R}$.

ZADATAK 2

(a) (10 bodova) Neka je $W \leq M_3(\mathbb{R})$ potprostor antisimetričnih matrica. Odredite jednu bazu za W te dualnu bazu te baze.

(b) (10 bodova) Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ proizvoljna matrica.

- Dokažite da postoji $\mu \in \mathbb{C}$ takav da je $A - \mu I$ regularna matrica.
- Dokažite da se A može zapisati kao zbroj 2025 regularnih matrica.

Rješenje.

(a) Jedna moguća baza je $\{E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32}\}$, gdje je E_{ij} matrica koja ima jedinicu na mjestu (i, j) i ostalo nule.

Dualna baza je baza $\{b_1^*, b_2^*, b_3^*\}$ definirana kao $b_1^*(E_{12} - E_{21}) = 1, b_1^*(E_{13} - E_{31}) = 0, b_1^*(E_{23} - E_{32}) = 0$ te analogno b_2^*, b_3^*.

(b) Budući da je $A \in M_n(\mathbb{C})$, u spektru matrice A je najviše n različitih elemenata. Slijedi da postoji $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ koji nije u $\sigma(A)$.

Sada je $\det(A - \mu I) \neq 0$, pa je $A - \mu I$ regularna.

Slijedi da je

$$A = (A - \mu I) + \sum_{i=1}^{2024} \frac{1}{2024} \mu I$$

rastav matrice A na 2025 regularnih matrica.

$\boxed{\text{ZADATAK 3}}$

(a) (12 bodova) Neka je $P \in L(\mathbb{R}^3)$ projektor na potprostor

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

u smjeru potprostora $L = [\{(0, 1, 0)\}]$.

- Odredite matrični zapis operatora P^* u kanonskoj bazi.
- Je li P ortogonalan projektor?

(b) (12 bodova) Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrica takva da vrijedi $A^2 = A^*$. Koje sve vrijednosti može poprimiti $\lambda \in \sigma(A)$?

Rješenje.

(a) Vrijedi:

$$M = [\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}],$$

pa je zapis projektora P u bazi $(f) = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1), (0, 1, 0)\}$ za $\mathbb{R}^3$:

$$P(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Slijedi da je:

$$\begin{aligned} P(e) &= I(e, f)P(f)I(f, e) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Slijedi da je:

$$P^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

pa, s obzirom na to da je u ortonormiranoj bazi $P(e) \neq P^*(e)$, slijedi da P nije ortogonalan projektor.

(b) Vrijedi $AA^* = AA^2 = A^3 = A^2A = A^*A$, pa je matrica A normalna. Slijedi da postoje unitarna matrica $U \in M_n(\mathbb{C})$ i dijagonalna matrica $D \in M_n(\mathbb{C})$ takve da je $A = UDU^*$.

Dakle, $A^2 = UD^2U* = UD^*U^* = A^*$, pa je $D^2 = D^*$.

Zato je za svaku svojstvenu vrijednost $\lambda \in \sigma(A)$: $\lambda^2 = \overline{\lambda}$.

Slijedi da je $\sigma(A) \subseteq \{0, 1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$

$\boxed{\text{ZADATAK 4}}$

(16 bodova) Nađite neku ortogonalnu matricu Q takvu da je $Q^T AQ$ dijagonalna matrica ako je

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ je simetrična, pa je ortogonalno slična dijagonalnoj matrici, tj. postoje ortogonalna matrica Q i dijagonalna matrica D takve da je $A = QDQ^T$.

Vrijedi: $k_A(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda - 2)^2\lambda$, tj. $\sigma(A) = \{0, 2, 5\}$.

Pripadni svojstveni potprostori su

$$V_A(5) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V_A(2) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, V_A(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

pa, s obzirom da su vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima međusobno ortogonalni, preostaje ortonormirati svaku bazu posebno:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\text{ZADATAK 5}}$

(4+6+10 bodova) Pretpostavimo da stupci matrice $A \in M_{mn}$ čine ortonormiran skup u M_{m1}.

(a) Dokažite da je $m \geq n$.

(b) Ako je $m = n$, dokažite da je A unitarna matrica.

(c) Ako je $m > n$, dokažite da postoji matrica $B \in M_{m,m-n}$ takva da je matrica $C = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ unitarna.

Rješenje. Neka je $A = \begin{bmatrix} E_1 & \dots & E_n \end{bmatrix}$, gdje su $E_1, \dots, E_n \in M_{m,1}$ stupci matrice A.

(a) Skup $\{E_1, \dots, E_n\} \subseteq M_{m1}$ je ortonormiran, pa je linearno nezavisan u $M_{m,1}$. Broj elemenata linearno nezavisnog skupa u nekom vekorskom prostoru je najviše dimenzija tog prostora, odakle slijedi $n \leq \dim M_{m,1} = m$.

(b) Pretpostavimo da je $m = n$. Zbog $r(A) = n$ je $A \in M_n$ regularna matrica i vrijedi

$$A^*A = \begin{bmatrix} E_1^* \\ \vdots \\ E_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & \dots & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_i^* E_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle E_j, E_i \rangle \end{bmatrix} = I.$$

Dakle $A^{-1} = A^*$, pa je A unitarna matrica.

(c) Pretpostavimo da je $m > n$. Tada ortonormiran skup $\{E_1, \dots, E_n\}$ možemo proširiti do ortonormirane baze $\{E_1, \dots, E_n, E_{n+1}, \dots, E_m\}$ za $M_{m,1}$. Neka je $B \in M_{m,m-n}$ matrica kojoj su stupci redom $E_{n+1}, \dots, E_m$, da $B = \begin{bmatrix} E_{n+1} & \dots & E_m \end{bmatrix}$. Sada iz b) dijela zadatka slijedi da je matrica $C = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \in M_m$ unitarna.