

LINEARNA ALGEBRA 2

Četvrti ispitni rok - 9. rujna 2024.

ZADATAK 1

(20 bodova) Nađite neku ortogonalnu matricu U takvu da je $U^T A U$ dijagonalna matrica ako je

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

LINEARNA ALGEBRA 2

Četvrti ispitni rok - 9. rujna 2024.

ZADATAK 2

(20 bodova)

- (a) Zadana je kvadratna forma $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$q(x) = 3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2.$$

Klasificirajte krivulju K danu s $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : q(x_1, x_2) - 6x_1 + 2x_2 - 4 = 0\}$, te odredite koordinate ishodišta te dviju jediničnih točaka koje određuju koordinatni sustav u kojem ta krivulja poprima kanonski oblik.

- (b) Postoji li skalarni produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na $\mathbb{R}^2$ takav da je $q(x) = \langle \langle x, x \rangle \rangle$ za sve $x \in \mathbb{R}^2$? Ako postoji, navedite primjer takvog, u suprotnom dokažite odgovarajuću tvrdnju.

LINEARNA ALGEBRA 2

Četvrti ispitni rok - 9. rujna 2024.

ZADATAK 3

Neka je $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, te $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid AF = FA\} \leq M_2(\mathbb{R})$. Odredite

- a) (10 bodova) jednu ortonormiranu bazu za W ,
- b) (5 bodova) ortogonalnu projekciju matrice $H = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ na W ,
- c) (5 bodova) jednu bazu za $W^\perp$, ortogonalni komplement od W u $M_2(\mathbb{R})$.

LINEARNA ALGEBRA 2

Četvrti ispitni rok - 9. rujna 2024.

ZADATAK 4

(20 bodova)

- (a) Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor te $A \in L(V)$. Dokažite da je operator $B = A^*A + I$ invertibilan te da je $\sigma(B^{-1}) \subseteq \langle 0, 1]$.
- (b) Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ unitarna matrica takva da vrijedi

$$A^3 - 2A^2 - 5A + 6I = 0.$$

Dokažite da je $A = I$.

LINEARNA ALGEBRA 2

Četvrti ispitni rok - 9. rujna 2024.

ZADATAK 5

Neka je $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ unitaran vektorski prostor konačne dimenzije. Dokažite:

- a) (5 bodova) Ako za svaki $x, y \in V$ vrijedi $\langle Ax, y \rangle = 0$, tada je $A = 0$,
- b) (5 bodova) $\text{Ker } A = \text{Ker } A^* A$,
- c) (10 bodova) $\text{Im } A = \text{Im } A A^*$.