LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi ispitni rok - 30. lipnja 2025.

ZADATAK 1

Neka je $(b) = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ baza za vektorski prostor $\mathbb{R}^3$ te neka je $A \in L(\mathbb{R}^3)$ takav da je

$$A(b) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (5 bodova) Odredite $A(e)$, gdje je (e) kanonska baza za $\mathbb{R}^3$.

(b) (5 bodova) Odredite $A(x_1, x_2, x_3)$ za proizvoljan $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

(c) (5 bodova) Odredite $\mathrm{Ker}(A)$ i $\mathrm{Im}(A)$.

(d) (5 bodova) Odredite $A^*(x_1, x_2, x_3)$ za proizvoljan $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Rješenje.

(a) $A(e) = I(e,b)A(b)I(b,e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(b) Iz (a) dijela možemo očitati $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, \frac{1}{2}(x_1 + 3x_2 + x_3), \frac{1}{2}(x_1 + 3x_2 - x_3))$

(c) Računamo $\mathrm{Ker}\, A$:

$$x_1 + x_2 = 0, \frac{1}{2}(x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \frac{1}{2}(x_1 + 3x_2 - x_3) = 0,$$

pa je $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$ te je po teoremu o rangu i defektu $r(A) = 3$ i $\mathrm{Im}\, A = \mathbb{R}^3$

(d) Budući da je (e) ortonormirana baza, $A^*(e) = A(e)^T$, pa je:

$$A^*(y_1, y_2, y_3) = (y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3, y_1 + \frac{3}{2}y_2 + \frac{3}{2}y_3, \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3).$$

ZADATAK 2

(a) (14 bodova) Dana je krivulja drugog reda jednadžbom

$$2x^2 + 6xy + 2y^2 - x - 8y + 2 = 0.$$

Odredite:

- kojeg je tipa ta krivulja,
- koordinate ishodišta novog koordinatnog sustava,
- opišite kako je taj koordinatni sustav dobiven iz polaznog koordinatnog sustava.

(b) (6 bodova) Dana je krivulja drugog reda jednadžbom

$$2x^2 + 6xy + cy^2 - x - 8y + 2 = 0.$$

Pronađite 5 vrijednosti parametra $c \in \mathbb{R}$ za koje krivulja nije ni elipsa ni parabola.

Rješenje.

(a) Jednadžbu možemo zapisati u obliku $\langle AX, X\rangle + \langle B, X\rangle + C = 0$, gdje je $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \end{bmatrix}$, $C = 2$.

Računamo $k_A(\lambda) = (2-\lambda)^2 - 9$, pa je $\sigma(A) = \{-1, 5\}$.

Pripadni svojstveni vektori su $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ te je $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ matrica rotacije za kut $-\frac{\pi}{4}$.

Jednadžba u novim koordinatama je

$$-x'^2 + 5y'^2 + \frac{7}{\sqrt{2}} - \frac{9}{\sqrt{2}}y' + 2 = 0,$$

tj.

$$-(x' - \frac{7\sqrt{2}}{4})^2 + 5(y' - \frac{9\sqrt{2}}{20})^2 + 6.1 = 0$$

Uvedimo nove koordinate: $x'' = x' - \frac{7\sqrt{2}}{4}$, $y'' = y' - \frac{9\sqrt{2}}{20}$,

$$\frac{x''^2}{6.1} - \frac{y''^2}{1.22} = 1.$$

Dobivena krivulja je hiperbola, a centralna je u koordinatnom sustavu rotiranom za $-\frac{\pi}{4}$, a zatim translatiranom za $\begin{bmatrix} \frac{7\sqrt{2}}{4} \\ \frac{9\sqrt{2}}{20} \end{bmatrix}$.

Koordinate ishodišta u novom koordinatnom sustavu su $x'' = 0, y'' = 0$.

Dakle, $x' = x'' + \frac{7\sqrt{2}}{4} = \frac{7\sqrt{2}}{4}$, $y' = y'' + \frac{9\sqrt{2}}{20} = \frac{9\sqrt{2}}{20}$.

Slijedi da je $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' = 2.2$ i $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' = -1.3$.

(b) Da bi krivulja bila elipsa, nužno je determinanta pripadne matrice A pozitivna, a da bi bila parabola nužno je jednaka nuli.

Dakle, ako je $\det A < 0$, krivulja nije ni elipsa ni parabola i to se postiže za $c < \frac{9}{2}$.

ZADATAK 3

(a) (8 bodova) Dana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 13 \\ 4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte A^{10}. (Rezultat možete ostaviti u obliku umnoška triju matrica.)

(b) (12 bodova) Neka je $A \in L(\mathbb{R}^4)$ linearan operator takav da je

$$\begin{aligned} A(1,0,0,1) &= (3,0,0,3), \\ A(0,-1,0,2) &= (0,-3,0,6) \\ A^*(0,0,2,0) &= (0,0,1,0), \\ A^*(1,0,2,3) &= (4,-2,6,8). \end{aligned}$$

- Izračunajte $d(A - 3I)$.
- Postoji li $y \in \mathbb{R}^4$ takav da je $A^*y = 3y + (1,0,0,0)$? Obrazložite.
- Postoji li $y \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ takav da je $A^*y = 3y$? Obrazložite.

Rješenje.

(a) Računamo: $\sigma(A) = \{-5, 5, 10\}$ te su svojstveni vektori $\{-2,1,0\}$, $\{1,2,0\}$, $\{1,0,1\}$.
Slijedi da je $A = SDS^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$.
Dakle, $A^{10} = (SDS^{-1})^{10} = SD^{10}S^{-1}$.

(b) $(1,0,0,1)$ i $(0,-1,0,2)$ su svojstveni vektori za A za $\lambda = 3$ i linearno su nezavisni. Dakle, $d(A - 3I) \geq 2$.

Također, $(A^* - 3I)(0,0,2,0) = (0,0,1,0) - (0,0,6,0) = (0,0,-5,0)$, $(A^* - 3I)(1,0,2,3) = (4,-2,6,8) - (3,0,6,9) = (1,-2,0,-1)$, pa su $(0,0,-5,0)$ i $(1,-2,0,-1)$ u $\mathrm{Im}(A^* - 3I)$ i linearno su nezavisni. Slijedi da je $r(A^* - 3I) \geq 2$.

Sada iz ortogonalne dekompozicije slijedi da je $r(A^* - 3I) = 2$ i $d(A - 3I) = 2$ te je

$$\mathrm{Ker}(A - 3I) = [\{(1,0,0,1), (1,0,2,3)\}],$$

$$\mathrm{Im}(A^* - 3I) = [\{(0,0,-5,0), (1,-2,0,-1)\}].$$

Pretpostavimo sada da postoji neki $y \in \mathbb{R}^4$ takav da je $A^*y = 3y + (1,0,0,0)$.

Slijedi da je $(A^* - 3I)y = (1,0,0,0)$. No, $(1,0,0,0)$ nije u $\mathrm{Im}(A^* - 3I)$, pa je to kontradikcija.

Budući da je $r(A^* - 3I) = 2$, slijedi da je $d(A^* - 3I) = 2$, pa postoji netrivijalan vektor takav da je $A * y = 3y$.

ZADATAK 4

Neka je $P_M \in L(\mathbb{R}^4)$ ortogonalni projektor na potprostor

$$M = \{(x, y, z, q) \in \mathbb{R}^4 : x + z - 2q = 0\}$$

unitarnog prostora $\mathbb{R}^4$ sa standardnim skalarnim produktom.

(a) (4 boda) Odredite eksplicitno $P_M(x, y, z, q)$, za proizvoljan $(x, y, z, q) \in \mathbb{R}^4$.

(b) (6 bodova) Odredite najbolju aproksimaciju vektora $(1, 2, 0, -1)$ vektorima iz M te udaljenost vektora $(1, 2, 0, -1)$ od M.

(c) (4 boda) Odredite $M^\perp$.

(d) (6 bodova) Odredite sve vektore iz potprostora $W = \{(x, y, z, q) : x = q = 0\}$ takve da im je udaljenost od M jednaka 2.

Rješenje: Za početak vidimo da se M može zapisati kao

$$M = \{(x, y, z, q) \in \mathbb{R}^4 : \langle (x, y, z, q), (1, 0, 1, -2)\rangle = 0\},$$

pa je

$$M^\perp = [\{(1, 0, 1, -2)\}].$$

(a) P_M se može iskazati kao $P_M = I - P_{M^\perp}$, pa normiranjem gornje baze za $M^\perp$ te korištenjem odgovarajućeg rezultata za ortogonalni projektor na $M^\perp$ dobivamo

$$\begin{aligned} P_M(x, y, z, q) &= (x, y, z, q) - \frac{1}{6}\langle (x, y, z, q), (1, 0, 1, -2)\rangle (1, 0, 1, -2) \\ &= \frac{1}{6}(5x - z + 2q, 6y, -x + 5z + 2q, 2x + 2z + 2q). \end{aligned}$$

(b) Kako je najbolja aproksimacija vektorima iz M upravo ortogonalna projekcija, iz (a) dijela dobivamo da je traženi vektor jednak $\frac{1}{2}(1, 4, -1, 0)$. Udaljenost vektora $(1, 2, 0, -1)$ od M je tada jednaka normi ortogonalne projekcije na $M^\perp$, odnosno

$$\left| \frac{1}{\sqrt{6}} \langle (1, 2, 0, -1), (1, 0, 1, -2)\rangle \right| = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

(d) Za proizvoljan $(0, y, z, 0) \in W$ je njegova udaljenost od M kao i u (b) dijelu zadatka

$$\left| \frac{1}{\sqrt{6}} \langle (0, y, z, 0), (1, 0, 1, -2)\rangle \right| = \frac{|z|}{\sqrt{6}}.$$

Da bi tražena udaljenost bila jednaka 2, nužno je da je $|z| = 2\sqrt{6}$. S obzirom da se za svaki $y \in \mathbb{R}$ vektori oblika $(0, y, \pm 2\sqrt{6}, 0)$ nalaze u W te su od M udaljeni za 2 prema prethodnom zaključku, slijedi da su to i svi traženi vektori.

$\boxed{\text{ZADATAK 5}}$

Neka je $V \neq \{0\}$ kompleksni konačnodimenzionalni unitarni prostor i $A \in L(V)$ takav da je $A^2 = 0$.

(a) (12 bodova) Dokažite da je $d(A) \geq \frac{1}{2}\dim V$, te da je $\sigma(A) = \{0\}$.

(b) (8 bodova) Ako je A normalan operator, dokažite da je tada $A = 0$.