LINEARNA ALGEBRA 2

Četvrti ispitni rok - 5. rujna 2025.

ZADATAK 1

Neka je $\mathcal{P}_3$ vektorski prostor polinoma stupnja manjeg ili jednakog 3 te neka je $Q \in L(\mathcal{P}_3)$ linearan operator dan sa

$$(Qp)(x) = xp'(x+1) + (x+2)p''(x).$$

(a) (5 bodova) Odredite matrični prikaz operatora Q u kanonskoj bazi.

(b) (5 bodova) Odredite matrični prikaz operatora Q u bazi $\{2, t-2, t^2, t^3+t^2\}$.

(c) (4 boda) Odredite rang i defekt operatora Q.

(d) (6 bodova) Odredite po jednu bazu za sliku i jezgru operatora Q.

ZADATAK 2

(a) (12 bodova) Dana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte A^{30}.

(b) (8 bodova) Neka je $B \in L(\mathbb{R}^5)$ linearan operator takav da je $r(B+2I) = 3$ te

$$B(1,1,2,0,3) = (-2,-2,-4,0,-6),$$
$$B(0,3,2,1,5) = (0,-6,-4,-2,-10).$$

Odredite sve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ takve da je $B(2,\lambda,2,-1,\mu) = (-4,-2\lambda,-4,2,-2\mu)$.

ZADATAK 3

(a) (10 bodova) Neka je A matrica iz zadatka 2(a). Pokažite da je s $b(x,y) = \langle Ax, y\rangle$ dan jedan skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$, gdje je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$.

(b) (10 bodova) U unitarnom prostoru $(\mathbb{R}^3, b(\cdot,\cdot))$ odredite reprezentant funkcionala f danog s

$$f(x,y,z) = x + y + z.$$

Okrenite list!

$\boxed{\text{ZADATAK 4}}$

Neka je $A \in L(\mathbb{R}^4)$ hermitski operator takav da je $\operatorname{Ker} A = [\{((1,0,1,0),(0,1,0,1)\}]$.

(a) (8 bodova) Odredite $\operatorname{Im} A$.

(b) (8 bodova) Odredite udaljenost vektora $(2,1,0,1)$ od $\operatorname{Ker} A$.

(c) (4 boda) Postoji li unitaran operator $U \in L(\mathbb{R}^4)$ takav da je UA također unitaran?

$\boxed{\text{ZADATAK 5}}$

a) (10 bodova) Neka je V vektorski prostor dimenzije $n \in \mathbb{N}$. Ako su $A, B \in L(V)$ takvi da je $AB = 0$ pokažite da je $r(A) + r(B) \leq n$.

b) (10 bodova) Neka je U unitaran prostor konačne pozitivne dimenzije, te su $K, H \in L(U)$ pri čemu je H hermitski operator, takvi da vrijedi

$$KH^2 + K + 2H^2 + 2I = 0.$$

Odredite K.

Rješenje:

a) Neka je $y \in ImB$. Tada postoji $x \in V$ takav da je $Bx = y$. Sada je

$$0 = (AB)x = A(Bx) = Ay.$$

Slijedi $ImB \subseteq KerA$, pa je $r(B) \leq d(A)$. Koristeći teorem o rangu i defektu imamo

$$r(B) \leq n - r(A) \Rightarrow r(A) + r(B) \leq n.$$

b) Faktoriziramo izraz:

$$(K + 2I)(H^2 + I) = 0.$$

Neka je (e) ortonormirana baza od V u kojoj se H dijagonalizira. Tada je matrični prikaz operatora $H^2 + I$, dijagonalna matrica kojoj su na dijagonali brojevi oblika $\lambda^2 + 1$, gdje je λ iz spektra od H. Ti brojevi su strogo veći od 0 jer je spektar od H sadržan u $\mathbb{R}$. Zaključujemo da je $H^2 + I$ invertibilan operator, pa djelovanjem njegovog inverza na gornju jednadžbu, s desna, imamo $K + 2I = 0$ odnosno $K = -2I$.