

Matematika 2 za kemičare

treci kolokvij, 21. lipnja 2016.

Napomene. Dozvoljena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dozvoljene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa.

Rješenja prva četiri zadatka pišite i predajte odvojeno od rješenja petog i šestog zadatka.

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

1.(15) Riješite zadaću

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = \sin(2x) \\ y(0) = \frac{3}{20} \\ y'(0) = -\frac{1}{10}. \end{cases}$$

2.(10) Odredite opće rješenje diferencijalne jednačbe

$$y' = \frac{1}{3}y^4.$$

3.(5 + 5) Izračunajte limese nizova:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+4} - \sqrt{n})$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 25^n}{5^{2n} + 6^n}$.

4.(15) Ispitajte konvergenciju redova:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{7}{8}\right)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}$.

Okreni!

5.(15) U kemijskoj se kinetici brzina reakcije može opisati kao derivacija veličine x (tzv. koncentracije izvedenih pretvorbi) po vremenu. Pritom je veza između x s trenutnom koncentracijom proizvoljnog sudionika J reakcije dana formulom $c_J = c_{J,0} + \nu_J x$, gdje c_J označava množinsku koncentraciju od J , $c_{J,0}$ početnu koncentraciju od J , a ν_J je odgovarajući stehiometrijski koeficijent. Za svaku reakciju iznos x u početnom trenutku je 0 mol/L.

Neka reakcija stehiometrije $2A + B + 3C \rightarrow D$ je trećeg reda (parcijalno prvog obzirom na svakog od reaktanata, tj. u svakom je trenutku brzina reakcije razmjerna umnošku trenutnih koncentracija od A , B i C). Neka su nadalje početne koncentracije reaktanata A , B i C redom 14 mmol/L, 13 mmol/L, 33 mmol/L.¹ Postavljanjem odgovarajuće diferencijalne jednadžbe i njenim rješavanjem odredite formulu ovisnosti umnoška koncentracija od A , B i C o vremenu.

6.(15) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln \frac{1}{1+x^2}.$$

- (a) **(5)** Odredite polinom p stupnja 3 koji najbolje aproksimira funkciju f oko nule.
- (b) **(10)** Uzimajući formulu tog polinoma p na segmentu $[-2, 2]$ kao formulu nove periodične funkcije g temeljnog perioda 4, skicirajte spektar amplituda od g i napišite najbolju aproksimaciju od g pomoću samo tri člana njenog Fourierovog reda. Kao poznate smijete koristiti formule

$$\int x^2 \cos(ax) dx = \frac{(a^2 x^2 - 2) \sin(ax) + 2ax \cos(ax)}{a^3} + C,$$

$$\int x^2 \sin(ax) dx = \frac{(2 - a^2 x^2) \cos(ax) + 2ax \sin(ax)}{a^3} + C$$

¹Iznose uzmite kao egzaktne, tj. s beskonačno mnogo značajnih znamenki.

Matematika 2 za kemičare

treci kolokvij, 21. lipnja 2016.

Napomene. Dozvoljena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dozvoljene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa.

Rješenja prva četiri zadatka pišite i predajte odvojeno od rješenja petog i šestog zadatka.

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

1.(15) Riješite zadaću

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = \cos(2x) \\ y(0) = -\frac{3}{20} \\ y'(0) = \frac{1}{10}. \end{cases}$$

2.(10) Odredite opće rješenje diferencijalne jednačbe

$$y' = \frac{1}{5}y^6.$$

3.(5 + 5) Izračunajte limese nizova:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n - 1}{5^n + 2^{4n}}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n} - \sqrt{n+5})$.

4.(15) Ispitajte konvergenciju redova:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 4n}{n^2 + 4n + 4}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n}{7^n}$.

Okreni!

5.(15) U početnom trenutku u cisterni obujma 1000 l je 800 L čiste vode. U cisternu obujma se brzinom od 3 L/h ulijeva vodena otopina neke kemikalije, masene koncentracije 50 g/L. Pretpostavljamo da se otopina u cisterni dovoljno brzo i dobro miješa da je otopina u cisterni uvijek homogena. Iz cisterne se otopina odlijeva brzinom 3 L/h. Kad masa kemikalije u cisterni dostigne 2500 g, prekida se dolijevanje otopine i dalje se ulijeva čista voda brzinom 2 L/h, a odljev se ubrzava na 4 L/h sve dok se cisterna potpuno ne isprazni. Skicirajte ovisnost mase kemikalije u cisterni o vremenu. Nakon koliko vremena od početka će se cisterna isprazniti?

6.(15) Periodička funkcija f temeljnog perioda 10 zadana je na intervalu $[-5, 5]$ formulom $f(x) = |x^3|$.

(a) **(10)** Skicirajte spektar amplituda od f i napišite najbolju aproksimaciju od f pomoću samo tri člana njenog Fourierovog reda. Kao poznate smijete koristiti formule

$$\int x^3 \cos(ax) dx = \frac{ax(a^2x^2 - 6) \sin(ax) + 3(a^2x^2 - 2) \cos(ax)}{a^4} + C,$$

$$\int x^3 \sin(ax) dx = \frac{3(a^2x^2 - 2) \sin(ax) - ax(a^2x^2 - 6) \cos(ax)}{a^4} + C$$

(b) **(5)** Odredite polinom p stupnja 2 koji oko nule najbolje aproksimira u (a) dijelu zadatka dobivenu aproksimaciju.

Matematika 2 za kemičare

treci kolokvij, 21. lipnja 2016.

Napomene. Dozvoljena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dozvoljene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa.

Rješenja prva četiri zadatka pišite i predajte odvojeno od rješenja petog i šestog zadatka.

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

1.(15) Riješite zadaću

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = \sin(2x) \\ y(0) = \frac{1}{20} \\ y'(0) = -\frac{3}{10}. \end{cases}$$

2.(10) Odredite opće rješenje diferencijalne jednačbe

$$y' = -\frac{1}{3}y^4.$$

3.(5 + 5) Izračunajte limese nizova:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 4^n}{2^{2n} + 3^n}$.

4.(15) Ispitajte konvergenciju redova:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n 3^{-n} n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 6n}{n^2 + 6n + 9}$.

Okreni!

5.(15) U kemijskoj se kinetici brzina reakcije može opisati kao derivacija veličine x (tzv. koncentracije izvedenih pretvorbi) po vremenu. Pritom je veza između x s trenutnom koncentracijom proizvoljnog sudionika J reakcije dana formulom $c_J = c_{J,0} + \nu_J x$, gdje c_J označava množinsku koncentraciju od J , $c_{J,0}$ početnu koncentraciju od J , a ν_J je odgovarajući stehiometrijski koeficijent. Za svaku reakciju iznos x u početnom trenutku je 0 mol/L.

Neka reakcija stehiometrije $2A + B + 3C \rightarrow D$ je trećeg reda (parcijalno prvog obzirom na svakog od reaktanata, tj. u svakom je trenutku brzina reakcije razmjerna umnošku trenutnih koncentracija od A , B i C). Neka su nadalje početne koncentracije reaktanata A , B i C redom 14 mmol/L, 13 mmol/L, 33 mmol/L.² Postavljanjem odgovarajuće diferencijalne jednadžbe i njenim rješavanjem odredite formulu ovisnosti umnoška koncentracija od A , B i C o vremenu.

6.(15) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln \frac{1}{1+x^2}.$$

- (a) **(5)** Odredite polinom p stupnja 3 koji najbolje aproksimira funkciju f oko nule.
- (b) **(10)** Uzimajući formulu tog polinoma p na segmentu $[-2, 2]$ kao formulu nove periodične funkcije g temeljnog perioda 4, skicirajte spektar amplituda od g i napišite najbolju aproksimaciju od g pomoću samo tri člana njenog Fourierovog reda. Kao poznate smijete koristiti formule

$$\int x^2 \cos(ax) dx = \frac{(a^2 x^2 - 2) \sin(ax) + 2ax \cos(ax)}{a^3} + C,$$

$$\int x^2 \sin(ax) dx = \frac{(2 - a^2 x^2) \cos(ax) + 2ax \sin(ax)}{a^3} + C$$

²Iznose uzmite kao egzaktne, tj. s beskonačno mnogo značajnih znamenki.

Matematika 2 za kemičare

treci kolokvij, 21. lipnja 2016.

Napomene. Dozvoljena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dozvoljene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa.

Rješenja prva četiri zadatka pišite i predajte odvojeno od rješenja petog i šestog zadatka.

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

1.(15) Riješite zadaću

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \cos(2x) \\ y(0) = -\frac{1}{20} \\ y'(0) = \frac{3}{10}. \end{cases}$$

2.(10) Odredite opće rješenje diferencijalne jednačbe

$$y' = -\frac{1}{5}y^6.$$

3.(5 + 5) Izračunajte limese nizova:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 9^n}{5^n + 3^{2n}}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n} - \sqrt{n+2})$.

4.(15) Ispitajte konvergenciju redova:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 8n}{n^2 + 8n + 16}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n7^{-n}6^n$.

Okreni!

5.(15)

U početnom trenutku u cisterni obujma 1000 l je 800 L čiste vode. U cisternu obujma se brzinom od 3 L/h ulijeva vodena otopina neke kemikalije, masene koncentracije 50 g/L. Pretpostavljamo da se otopina u cisterni dovoljno brzo i dobro miješa da je otopina u cisterni uvijek homogena. Iz cisterne se otopina odlijeva brzinom 3 L/h. Kad masa kemikalije u cisterni dostigne 2500 g, prekida se dolijevanje otopine i dalje se ulijeva čista voda brzinom 2 L/h, a odljev se ubrzava na 4 L/h sve dok se cisterna potpuno ne isprazni. Skicirajte ovisnost mase kemikalije u cisterni o vremenu. Nakon koliko vremena od početka će se cisterna isprazniti?

6.(15) Periodička funkcija f temeljnog perioda 10 zadana je na intervalu $[-5, 5]$ formulom $f(x) = |x^3|$.

(a) **(10)** Skicirajte spektar amplituda od f i napišite najbolju aproksimaciju od f pomoću samo tri člana njenog Fourierovog reda. Kao poznate smijete koristiti formule

$$\int x^3 \cos(ax) dx = \frac{ax(a^2x^2 - 6) \sin(ax) + 3(a^2x^2 - 2) \cos(ax)}{a^4} + C,$$

$$\int x^3 \sin(ax) dx = \frac{3(a^2x^2 - 2) \sin(ax) - ax(a^2x^2 - 6) \cos(ax)}{a^4} + C$$

(b) **(5)** Odredite polinom p stupnja 2 koji oko nule najbolje aproksimira u (a) dijelu zadatka dobivenu aproksimaciju.