3. domaća zadaća

Nizovi realnih brojeva

1. Odredite koristeći definiciju limesa

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n-1} \qquad\qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}.$$

2. a) Dokažite da je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadan formulom

$$a_n = \frac{n^3\sin(\sin(n^{2026})) + 7n\cos(\cos(n^{2026}))}{(-n)^5+(-n)^3}$$

konvergentan.

b) Ispitajte je li niz zadan rekurzivno s

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{3a_n+4},\ \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 1$$

konvergentan te ako je, odredite mu limes.

3. Niz (a_n) zadan je rekurzivno na sljedeći način:

$$a_1 = 5, \qquad a_{n+1} = \frac{3-6a_n}{a_n-4}.$$

Konvergira li niz (a_n)? Ako konvergira, odredite njegov limes.

4. Niz (a_n) zadan je rekurzivno na sljedeći način:

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = \frac{2a_n+1}{a_n^2+2}.$$

Konvergira li niz (a_n)? Ako konvergira, odredite njegov limes.

5. Odredite parametar $a\in\mathbb{R}$ tako da sljedeći niz konvergira:

$$a_n = \frac{(2+(-1)^n)^n+2^n}{3^n} + a\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right), \qquad n\in\mathbb{N}.$$

6. a) Odredite, ako postoji, limes niza:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n+1}{a_n+7}, \quad n\in\mathbb{N},$$

b) Odredite skup gomilišta niza:

$$b_n = \frac{n^4+4^n\cos(n\pi)+3^n}{n^4+3\cdot 4^n+2^n},\ n\in\mathbb{N}.$$

7. Odredite sva gomilišta niza

$$\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^{\frac{n^2+n}{2}}, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

8. a) Nađite primjer niza kojemu je skup gomilišta $\{-8, 0, 8\}$.

b) Odredite limes inferior i limes superior niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ zadanog sa

$$a_n = \frac{n^4\cos(\pi\sin(\frac{n\pi}{2})) + 10n^4\sin(\frac{n\pi}{2}) + n^2}{(n^2-1)(n^2+1)}.$$

9. Odredite sve parametre $b \in \mathbb{R}$ tako da niz

$$b_n = \frac{2^{3n+5} + n^5 + 17}{n^8 + 2^{3n+1}} + (b^2-9)\cos(\frac{n\pi}{2})$$

bude konvergentan.

10. Dokažite ili opovrgnite sljedeće tvrdnje (ako je tvrdnja istinita, dokažite je, a ako je lažna, navedite kontraprimjer):

a) Neka je $(a_n)_n$ konvergentni niz realnih brojeva takav da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Tada u skupu $[0,1\rangle$ postoji beskonačno mnogo članova niza.

b) Neka je $(a_n)_n$ konvergentni niz realnih brojeva takav da je $a_n < 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i neka je

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Tada je $a \leq 0$.

c) Svaki niz u intervalu $\langle 0,1\rangle$ ima podniz koji konvergira k nekom broju iz $\langle 0,1\rangle$.

d) Svaki niz u segmentu $[0,1]$ ima podniz koji konvergira k nekom broju iz $[0,1]$.

e) Neka su $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ i $(c_n)_n$ nizovi realnih brojeva takvi da je $a_n \leq b_n \leq c_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i neka je x gomilište nizova $(a_n)_n$ i $(c_n)_n$. Tada je x nužno gomilište niza $(b_n)_n$.