MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 01. veljače 2022.

Zadatak 1. (6 bodova) Za $t \in \mathbf{R}$ rekurzivno je zadan niz

$$a_1 := t, \qquad a_{n+1} := a_n^2 + a_n, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Ispitajte konvergenciju niza $(a_n)_n$ u $\overline{\mathbf{R}}$ u ovisnosti o parametru $t \in \mathbf{R}$. U slučajevima kad niz konvergira, odredite mu limes.

Rješenje. Uočimo da za sve $n \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$a_{n+1} = \underbrace{a_n^2}_{\geq 0} + a_n \geq a_n$$

pa slijedi da je niz $(a_n)_n$ rastuć. Zaključujemo da ili konvergira prema nekom realnom broju $L \in \mathbf{R}$, ili konvergira prema $+\infty$.

Pretpostavimo da $a_n \to L \in \mathbf{R}$. Puštanjem $n \to \infty$ na rekurzivnu relaciju $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$ dobivamo

$$L = L^2 + L \implies L = 0.$$

Budući da je niz $(a_n)_n$ rastuć, to znači da je $0 = \sup\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$ pa specijalno $a_n \leq 0$ za sve $n \in \mathbf{N}$. Promotrimo funkciju

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = x^2 + x$$

za koju se lako pokaže da

$$f(x) \leq 0 \iff x \in [-1, 0].$$

Dakle, imamo

$$f(t) = f(a_1) = a_2 \leq 0 \iff t \in [-1, 0].$$

Slijedi da je $t \in [-1, 0]$ nužan uvjet za konvergenciju niza u $\mathbf{R}$.

Obratno, pretpostavimo $t \in [-1, 0]$. Lako se pokaže da je $f([-1, 0]) \subseteq [-1, 0]$ pa indukcijom slijedi da je

$$a_n \in [-1, 0], \qquad \text{za sve } n \in \mathbf{N}.$$

Zaključujemo da je niz $(a_n)_n$ rastuć i odozgo ograničen s 0 pa slijedi da $a_n \to L$ za neki $L \in \mathbf{R}$. Prema gornjoj diskusiji nužno slijedi $L = 0$.

Dakle, niz $(a_n)_n$ konvergira u $\mathbf{R}$ ako i samo ako $t \in [-1, 0]$ pa prema napomeni s početka, za $t \in \mathbf{R} \setminus [-1, 0]$ niz nužno konvergira u $+\infty$.

Sve u svemu, imamo

$$a_n \to \begin{cases} 0, & \text{ako je } t \in [-1, 0], \\ +\infty, & \text{ako je } t \in \mathbf{R} \setminus [-1, 0]. \end{cases}$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 01. veljače 2022.

Zadatak 2.

(a) (3 boda) Odredite parametar $a \in \mathbb{R}$ tako da sljedeći niz konvergira

$$a_n = \frac{(2+(-1)^n)^n + 2^n}{3^n + n^3 + n} + a\cos^2\frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) (4 boda) Odredite $\lim_n b_n$ gdje je

$$b_n = \sqrt[n]{(1+\frac{2}{2})^3(1+\frac{2}{3})^5\cdots(1+\frac{2}{n+1})^{2n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rješenje.

a)

$$a_{2k} = \frac{3^{2k}+2^{2k}}{3^{2k}+8k^3+2k} + a\cdot 1 = \frac{1+(\frac{2}{3})^{2k}}{1+\frac{8k^3}{3^{2k}}+\frac{2k}{3^{2k}}} + a\cdot 1 \to 1+a$$

$$a_{2k-1} = \frac{1+2^{2k-1}}{3^{2k-1}+8(k-1)^3+2(k-1)} + 0 \to 0$$

Dakle mora biti $1+a=0$, odnosno $a=-1$.

b)

$$\ln b_n = \frac{\ln(1+\frac{2}{2})^3 + \ln(1+\frac{2}{3})^5 + \cdots + \ln(1+\frac{2}{n+1})^{2n+1}}{n}$$

Po Stolzovom teoremu dovoljno je gledati postoji li limes niza

$$\ln(1+\frac{2}{n+2})^{2n+3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Kako je

$$\ln(1+\frac{2}{n+2})^{2n+3} = \ln[(1+\frac{2}{n+2})^{\frac{n+2}{2}}]^{\frac{2}{n+2}(2n+3)} \to \ln e^4$$

Zaključujemo $\lim_n b_n = e^4$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 01. veljače 2022.

Zadatak 3. (6 bodova) Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \frac{2mn + 11m + 6n + 27}{mn + 4m + n + 4} \cdot \cos(n\pi) \cdot \sin\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right) : n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

ako postoje.

Rješenje. Uočimo kako se izraz prije trigonometrijskih funkcija može zapisati kao

$$\frac{2mn + 11m + 6n + 27}{mn + 4m + n + 4} = 2 + \frac{3}{n+4} + \frac{4}{m+1}.$$

Vrijedi

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} -1 & , \ n \text{ neparan} \\ 1 & , \ n \text{ paran} \end{cases} \quad \text{i} \quad \sin\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} -1 & , \ m \text{ neparan} \\ 1 & , \ m \text{ paran} \end{cases}$$

pa se S može zapisati kao unija četiri skupa

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{ 2 + \frac{3}{n+4} + \frac{4}{m+1} : n \text{ neparan i } m \text{ neparan} \right\} \\ S_2 &= \left\{ -\left(2 + \frac{3}{n+4} + \frac{4}{m+1}\right) : n \text{ neparan i } m \text{ paran} \right\} \\ S_3 &= \left\{ -\left(2 + \frac{3}{n+4} + \frac{4}{m+1}\right) : n \text{ paran i } m \text{ neparan} \right\} \\ S_4 &= \left\{ 2 + \frac{3}{n+4} + \frac{4}{m+1} : n \text{ paran i } m \text{ paran} \right\}. \end{aligned}$$

Nizovi $n \mapsto \frac{3}{n+4}$ te $m \mapsto \frac{4}{m+1}$ su padajući. Infimum i supremum skupova S_i je jednostavno za odrediti jer ih odmah i vidimo. Za S_1, vidimo da će se supremum postići za najmanji mogući izbor n i m (to su $n = m = 1$), dok će se infimum postizati *na limesu* kad n i m postaju sve veći i veći. Alternativno, možemo gledati S_1 kao zbroj dva skupa. Isti argument ponavljamo za svaki od preostala tri skupa, pa dobivamo

$$\begin{array}{lclcl} \inf S_1 &=& 2 & , & \sup S_1 = 2 + \frac{3}{5} + \frac{4}{2} = \frac{23}{5} \\ \inf S_2 &=& -2 - \frac{3}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{59}{15} & , & \sup S_2 = -2 \\ \inf S_3 &=& -2 - \frac{3}{6} - \frac{4}{2} = -\frac{9}{2} & , & \sup S_3 = -2 \\ \inf S_4 &=& 2 & , & \sup S_4 = 2 + \frac{3}{6} + \frac{4}{3} = \frac{23}{6} \end{array}$$

pa u končanici dobivamo da su

$$\sup S = \max\{\sup S_1, \sup S_2, \sup S_3, \sup S_4\} = \frac{23}{5},$$
$$\inf S = \min\{\inf S_1, \inf S_2, \inf S_3, \inf S_4\} = -\frac{9}{2}.$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 01. veljače 2022.

Zadatak 4.

(a) (4 boda) Izračunajte limes

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(e^{1-\cos^3(2x)}-e^{1-\cos^2 x})}{x\operatorname{arctg} x}.$$

(b) (2 boda) Neka je $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ funkcija takva da je $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2022$. Izračunajte

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{f(x)+2022}{f(x)}\right)\cdot\cos(f(x)^2+2022),$$

ako postoji.

Rješenje.

(a) Traženi limes se može napisati preko tabličnih limesa na sljedeći način:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(e^{1-\cos^3(2x)}-e^{1-\cos^2 x})}{x\operatorname{arctg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(e^{1-\cos^3(2x)}-e^{1-\cos^2 x})}{e^{1-\cos^3(2x)}-e^{1-\cos^2 x}}\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{e^{1-\cos^3(2x)}-1}{1-\cos^3(2x)}\cdot\frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2}\cdot 4\cdot\frac{1+\cos(2x)+\cos^2(2x)}{\frac{\operatorname{arctg} x}{x}}-\frac{e^{1-\cos^2 x}-1}{1-\cos^2 x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{\frac{\operatorname{arctg} x}{x}}\right)=$$
$$1\cdot(1\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{3}{1}-1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1})=6-1=5$$

(b) Uočimo da vrijedi

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{f(x)+2022}{f(x)}\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{\frac{f(x)}{x}+\frac{2022}{x}}{\frac{f(x)}{x}}\right)=\ln 1=0,$$

a kako je cos ograničena funkcija, to po teoremu o sendviču zaključujemo da traženi limes postoji i da je jednak 0.