MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 22. studenog 2022.

Zadatak 1.

(a) (4 boda) Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) = \arcsin \frac{\log_7 x + 2}{\log_7 x - 1}.$$

(b) (2 boda) Dokažite tvrdnju: Ako je $f : X \to Y$ strogo padajuća bijekcija. Pokažite da je tada i f^{-1} strogo padajuća.

Rješenje.

(a) Vrijedi da je $x \in \mathcal{D}(f)$ onda i samo onda kada su zadovoljeni svi od dolje navedenih uvjeta:

(i) $\frac{\log_7 x+2}{\log_7 x-1} \in [-1, 1]$ jer je domena arkusa sinusa $[-1, 1]$,

(ii) $\log_7 x - 1 \neq 0$ jer u nazivniku ne smijemo imati nulu,

(iii) $x > 0$ jer argument logaritma mora biti veći od 0.

Promotrimo ove uvjete jedan po jedan i odredimo za koje x-eve su oni ispunjeni.

(i) Rješavanjem nejednadžbe

$$-1 \leq \frac{\log_7 x + 2}{\log_7 x - 1}$$

dobivamo

$$x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{7}}\right] \cup (7, \infty),$$

dok rješavanjem nejednadžbe

$$\frac{\log_7 x + 2}{\log_7 x - 1} \leq 1$$

dobivamo $x \in (0, 7)$. Vidimo kako je presjek ta dva uvjeta

$$x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{7}}\right].$$

(ii) Vidimo kako smo rješavanjem prvog uvjeta implicitno riješili i ovaj uvjet jer $\log_7 x = 1$ ako i samo ako $x = 7$.

(iii) Ovaj uvjet je također zadovoljen s prvim uvjetom.

Dakle, zaključujemo

$$D(f) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{7}}\right].$$

(b) Neka su $y_1, y_2 \in Y$ takvi da je $y_1 < y_2$ i pretpostavimo da je $f^{-1}(y_1) \leq f^{-1}(y_2)$. Kako je f strogo padajuća funkcija, s vježbi iz Zadatka 1.28 slijedi da je

$$f\left(f^{-1}(y_1)\right) \geq f\left(f^{-1}(y_2)\right),$$

odnosno $y_1 \geq y_2$. Dobili smo kontradikciju s uvjetom $y_1 < y_2$, pa slijedi da je nužno $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$, odnosno da je f^{-1} strogo padajuća funkcija.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 22. studenog 2022.

Zadatak 2. (6 bodova)

Funkcija $f : \langle 0,2\rangle \to \mathbf{R}$ zadana je formulom

$$f(x) = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}(x^2 - 2x + 9)).$$

Odredite $f(\langle 0,1])$, pokažite da je

$$f|_{\langle 0,1]} : \langle 0,1] \to f(\langle 0,1])$$

bijekcija, te odredite $\left(f|_{\langle 0,1]}\right)^{-1}$. Postoji li interval veći od $\langle 0,1]$, sadržan u domeni od f, na kojem je f injekcija? Obrazložite.

Rješenje.

Kvadratna funkcija $h(x) = x^2 - 2x + 9 = (x-1)^2 + 8$ ima tjeme u $x = 1$, pa je strogo padajuća za $x \leq 1$. Definiramo funkcije

$$\begin{aligned}
&g_1 : \langle 0,1] \to [8,9\rangle, \quad g_1(x) = x^2 - 2x + 9,\\
&g_2 : [8,9\rangle \to [4\pi, 4\pi + \frac{\pi}{2}\rangle, \quad g_2(x) = \frac{\pi}{2}x,\\
&g_3 : [4\pi, 4\pi + \frac{\pi}{2}\rangle \to [0,+\infty\rangle, \quad g_3(x) = \mathrm{tg}x.
\end{aligned}$$

$f|_{\langle 0,1]} = g_3 \circ g_2 \circ g_1$ je bijekcija kao kompozicija bijekcija. $f(\langle 0,1]) = [0,+\infty\rangle$. Prema formuli za inverz kompozicije, imamo

$$(f|_{\langle 0,1]})^{-1} = g_1^{-1} \circ g_2^{-1} \circ g_3^{-1}$$

Odredimo inverze komponentnih funkcija.

$$\begin{aligned}
&g_1(x) = y \implies (x-1)^2 + 8 = y \implies x = 1 \pm \sqrt{y-8} \implies x = 1 - \sqrt{y-8}\\
&g_3(x) = y \implies \mathrm{tg}(x - 4\pi) = \mathrm{tg}x = y \overset{0 \leq x - 4\pi < \pi/2}{\implies} x - 4\pi = \mathrm{arctg}y \implies x = 4\pi + \mathrm{arctg}y
\end{aligned}$$

Dakle

$$\begin{aligned}
&g_1^{-1} : [8,9\rangle \to \langle 0,1], \quad g_1^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x-8},\\
&g_2^{-1} : [4\pi, 4\pi + \frac{\pi}{2}\rangle \to [8,9\rangle, \quad g_2^{-1}(x) = \frac{2}{\pi}x,\\
&g_3^{-1} : [0,+\infty\rangle \to [4\pi, 4\pi + \frac{\pi}{2}\rangle, \quad g_3^{-1}(x) = 4\pi + \mathrm{arctg}x.
\end{aligned}$$

Sada je

$$(f|_{\langle 0,1]})^{-1}(x) = 1 - \sqrt{(\frac{2}{\pi}(4\pi + \mathrm{arctg}x)) - 8}.$$

Veći interval ne postoji, jer $h(x) = x^2 - 2x + 9 = (x-1)^2 + 8$ ima tjeme u $x = 1$, pa na svakom većem intervalu od $\langle 0,1]$, podskupu od $\langle 0,2\rangle$, nije injekcija, naime $h(x) = h(1-x)$ za $x \in \langle 0,2\rangle$; a onda ni f nije injekcija.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 22. studenog 2022.

Zadatak 3.

(a) (3 boda) Odredite sliku funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zadane s

$$f(x) = 2^{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)\right)}$$

(b) (3 boda) Neka je $f : X \to Y$ i $A \subseteq X$. Odredite odnos skupova $f(A)$ i $f(f^{-1}(f(A)))$.

Rješenje.

(a) Primijetimo najprije da zbog $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ vrijedi:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$

Prema tome, funkciju možemo zapisati kao sljedeću kompoziciju: $f = f_4 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_1$, gdje su:

$$f_1(x) = x + \frac{\pi}{4}, \quad f_2(x) = \sin x, \quad f_3(x) = \operatorname{arctg}(x), \quad f_4(x) = 2^x.$$

Prema tome, slika je

$$f_4\left(f_3\left(f_2\left(f_1\left(\mathbf{R}\right)\right)\right)\right) = f_4\left(f_3\left(f_2\left(\mathbf{R}\right)\right)\right) = f_3(f_2([-1,1])) = f_4(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]) = \left[2^{-\frac{\pi}{4}}, 2^{\frac{\pi}{4}}\right]$$

(b) Dokazat ćemo da za svaki skup $A \subseteq X$ vrijedi $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ i da za svaki skup $B \subseteq Y$ vrijedi $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. Tada iz prvog uvjeta djelovanjem sa f na obje strane slijedi $f(f^{-1}(f(A))) \supseteq f(A)$, dok iz druge tvrdnje odabirom $B := f(A)$ slijedi $f(f^{-1}(f(A))) \subseteq f(A)$. Dakle, navedeni skupovi su jednaki.

Navedene tvrdnje postoje kao zadaci za domaću zadaću u vježbama, ali ponovit ćemo dokaz. Naime, ako je $x \in A$, tada je $f(x) \in f(A)$ pa je $x \in f^{-1}(A)$ i time je prva tvrdnja dokazana. Za drugu tvrdnju primijetimo da ako je $y \in f(f^{-1}(B))$, to znači da postoji $x \in f^{-1}(B)$ takav da je $f(x) = y$, ali kako je $x \in f^{-1}(B)$, to znači da je $y = f(x) \in B$ i time je i druga tvrdnja dokazana.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 22. studenog 2022.

Zadatak 4.

(a) (3 boda) Je li funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s pravilom pridruživanja

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ \sin(2\pi x) & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

periodična? Obrazložite.

(b) (4 boda) Postoji li surjekcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$|f(x)| + f(\operatorname{sh} x) \leq \operatorname{sgn} x.$$

Rješenje.

(a) Funkcija jest periodična jer je jedan njezin period $\tau = 2$. Naime, za $x \in \mathbb{Q}$ vrijedi da $x + 2 \in \mathbb{Q}$, pa dobivamo

$$f(x) = \sin(\pi x) = \sin(\pi x + 2\pi) = \sin(\pi(x + 2)) = f(x + 2).$$

Slično se pokaže da za $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ vrijedi $x + 2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ te da vrijedi $f(x) = f(x + 2)$.

(b) Pretpostavimo kako takva surjekcija postoji. Kako je f surjekcija, postoji $y \in \mathbb{R}$ takav da $f(y) = 2$ te označimo $x_0 = \operatorname{Arsh} y$. Za taj x_0 vrijedi $f(\operatorname{sh} x_0) = 2$. Kako je $|f(x)| \geq 0$, dobivamo da je lijeva strana u nejednakosti veća ili jednaka od 2. S druge pak strane, desna strana je manja ili jednaka od 1, pa smo dobili kontradikciju.

Dakle, takva surjekcija ne postoji.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 22. studenog 2022.

Zadatak 1.

(a) (4 boda) Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) = \operatorname{Arth} \frac{\log_7 x + 2}{\log_7 x - 1}.$$

(b) (2 boda) Kažemo da je $f : A \to \mathbb{R}$ ograničena ako postoji $M > 0$ takav da $|f(x)| \leq M$ za svaki $x \in A$.

Dokažite ili opovrgnite tvrdnju: svaka periodična funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ograničena funkcija.

Rješenje.

(a) Vrijedi da je $x \in \mathcal{D}(f)$ onda i samo onda kada su zadovoljeni svi od dolje navedenih uvjeta:

(i) $\frac{\log_7 x+2}{\log_7 x-1} \in (-1, 1)$ jer je domena Arth jednaka $(-1, 1)$,

(ii) $\log_7 x - 1 \neq 0$ jer u nazivniku ne smijemo imati nulu,

(iii) $x > 0$ jer argument logaritma mora biti veći od 0.

Promotrimo ove uvjete jedan po jedan i odredimo za koje x-eve su oni ispunjeni.

(i) Rješavanjem nejednadžbe

$$-1 < \frac{\log_7 x + 2}{\log_7 x - 1}$$

dobivamo

$$x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{7}}\right) \cup (7, \infty),$$

dok rješavanjem nejednadžbe

$$\frac{\log_7 x + 2}{\log_7 x - 1} < 1$$

dobivamo $x \in (0, 7)$. Vidimo kako je presjek ta dva uvjeta

$$x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{7}}\right).$$

(ii) Vidimo kako smo rješavanjem prvog uvjeta implicitno riješili i ovaj uvjet jer $\log_7 x = 1$ ako i samo ako $x = 7$.

(iii) Ovaj uvjet je također zadovoljen s prvim uvjetom.

Dakle, zaključujemo

$$D(f) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{7}}\right).$$

(b) Tvrdnja nije istinita, a primjer protuprimjera je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}(x) & , \quad x \in D(\operatorname{tg}) \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}.$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 22. studenog 2022.

Zadatak 2. (6 bodova)

Funkcija $f : \langle 2, 4\rangle \to \mathbf{R}$ zadana je formulom

$$f(x) = \mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2}(x^2 - 6x + 14)).$$

Odredite $f(\langle 2, 3])$, pokažite da je

$$f|_{\langle 2,3]} : \langle 2, 3] \to f(\langle 2, 3])$$

bijekcija, te odredite $\left(f|_{\langle 2,3]}\right)^{-1}$. Postoji li interval veći od $\langle 2, 3]$, sadržan u domeni od f, na kojem je f injekcija? Obrazložite.

Rješenje.

Kvadratna funkcija $h(x) = x^2 - 6x + 14 = (x - 3)^2 + 5$ ima tjeme u $x = 3$, pa je strogo padajuća za $x \le 3$. Definiramo funkcije

$$\begin{aligned}
&g_1 : \langle 2, 3] \to [5, 6\rangle, \quad g_1(x) = x^2 - 6x + 14,\\
&g_2 : [5, 6\rangle \to [2\pi + \frac{\pi}{2}, 2\pi + \pi\rangle, \quad g_2(x) = \frac{\pi}{2}x,\\
&g_3 : [2\pi + \frac{\pi}{2}, 2\pi + \pi\rangle \to \langle -\infty, 0], \quad g_3(x) = \mathrm{ctg}x.
\end{aligned}$$

$f|_{\langle 2,3]} = g_3 \circ g_2 \circ g_1$ je bijekcija kao kompozicija bijekcija. $f(\langle 2, 3]) = \langle -\infty, 0]$. Prema formuli za inverz kompozicije, imamo

$$(f|_{\langle 2,3]})^{-1} = g_1^{-1} \circ g_2^{-1} \circ g_3^{-1}$$

Odredimo inverze komponentnih funkcija.

$$\begin{aligned}
&g_1(x) = y \implies (x - 3)^2 + 5 = y \implies x = 3 \pm \sqrt{y - 5} \implies x = 3 - \sqrt{y - 5}\\
&g_3(x) = y \implies \mathrm{ctg}(x - 2\pi) = \mathrm{ctg}x = y \overset{\pi/2 \le x - 2\pi < \pi}{\implies} x - 2\pi = \mathrm{arcctg}y \implies x = 2\pi + \mathrm{arcctg}y
\end{aligned}$$

Dakle

$$\begin{aligned}
&g_1^{-1} : [5, 6\rangle \to \langle 2, 3], \quad g_1^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x - 5},\\
&g_2^{-1} : [2\pi + \frac{\pi}{2}, 2\pi + \pi\rangle \to [5, 6\rangle, \quad g_2^{-1}(x) = \frac{2}{\pi}x,\\
&g_3^{-1} : \langle -\infty, 0] \to [2\pi + \frac{\pi}{2}, 2\pi + \pi\rangle, \quad g_3^{-1}(x) = 2\pi + \mathrm{arcctg}x.
\end{aligned}$$

Sada je

$$(f|_{\langle 2,3]})^{-1}(x) = 3 - \sqrt{(\frac{2}{\pi}(2\pi + \mathrm{arcctg}x)) - 5}.$$

Veći interval ne postoji, jer $h(x) = x^2 - 6x + 14 = (x - 3)^2 + 5$ ima tjeme u $x = 3$, pa na svakom većem intervalu od $\langle 2, 3]$, podskupu od $\langle 2, 4\rangle$, nije injekcija, naime $h(x) = h(3 - x)$ za $x \in \langle 2, 4\rangle$; a onda ni f nije injekcija.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 22. studenog 2022.

Zadatak 3.

(a) (3 boda) Odredite sliku funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zadane s

$$f(x) = 2^{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)\right)}$$

(b) (3 boda) Neka je $f : X \to Y$ i $B \subseteq Y$. Odredite odnos skupova $f^{-1}(B)$ i $f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$.

Rješenje.

(a) Primijetimo najprije da zbog $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ vrijedi:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Prema tome, funkciju možemo zapisati kao sljedeću kompoziciju: $f = f_4 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_1$, gdje su:

$$f_1(x) = x - \frac{\pi}{4}, \quad f_2(x) = \sin x, \quad f_3(x) = \operatorname{arctg}(x), \quad f_4(x) = 2^x.$$

Prema tome, slika je

$$f_4\left(f_3\left(f_2\left(f_1\left(\mathbf{R}\right)\right)\right)\right) = f_4\left(f_3\left(f_2\left(\mathbf{R}\right)\right)\right) = f_3(f_2([-1,1])) = f_4(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]) = \left[2^{-\frac{\pi}{4}}, 2^{\frac{\pi}{4}}\right]$$

(b) Dokazat ćemo da za svaki skup $A \subseteq X$ vrijedi $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ i da za svaki skup $B \subseteq Y$ vrijedi $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. Tada iz drugog uvjeta djelovanjem sa f^{-1} na obje strane slijedi $f^{-1}f(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(B)$, dok iz prve tvrdnje odabirom $A := f^{-1}(B)$ slijedi $f^{-1}(f(f^{-1}(B))) \supseteq f^{-1}(B)$. Dakle, navedeni skupovi su jednaki.

Navedene tvrdnje postoje kao zadaci za domaću zadaću u vježbama, ali ponovit ćemo dokaz. Naime, ako je $x \in A$, tada je $f(x) \in f(A)$ pa je $x \in f^{-1}(A)$ i time je prva tvrdnja dokazana. Za drugu tvrdnju primijetimo da ako je $y \in f(f^{-1}(B))$, to znači da postoji $x \in f^{-1}(B)$ takav da je $f(x) = y$, ali kako je $x \in f^{-1}(B)$, to znači da je $y = f(x) \in B$ i time je i druga tvrdnja dokazana.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 22. studenog 2022.

Zadatak 4.

(a) (3 boda) Je li funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{1/2 + \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ s pravilom pridruživanja

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}(\pi x) & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ \operatorname{tg}(2\pi x) & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

periodična? Obrazložite.

(b) (4 boda) Postoji li surjekcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$\max\{0, f(x)\} + f(x^5) \leq \operatorname{sgn} x.$$

Napomena: maksimum dviju funkcija je funkcija koja je definirana na sljedeći način

$$\max\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} f(x) & , \quad f(x) \geq g(x) \\ g(x) & , \quad f(x) < g(x) \end{cases}.$$

Rješenje.

(a) Funkcija jest periodična jer je jedan njezin period $\tau = 1$. Naime, za $x \in \mathbb{Q}$ vrijedi da $x + 1 \in \mathbb{Q}$, pa dobivamo

$$f(x) = \operatorname{tg}(\pi x) = \operatorname{tg}(\pi x + \pi) = \operatorname{tg}(\pi(x+1)) = f(x+1).$$

Slično se pokaže da za $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ vrijedi $x + 1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ te da vrijedi $f(x) = f(x+1)$.

(b) Pretpostavimo kako takva surjekcija postoji. Kako je f surjekcija, postoji $y \in \mathbb{R}$ takav da $f(y) = 2$ te označimo $x_0 = \sqrt[5]{y}$. Za taj x_0 vrijedi $f(x_0^5) = 2$. Kako je $\max\{0, f(x)\} \geq 0$, dobivamo da je lijeva strana u nejednakosti veća ili jednaka od 2. S druge pak strane, desna strana je manja ili jednaka od 1, pa smo dobili kontradikciju.

Dakle, takva surjekcija ne postoji.