MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2024.

Zadatak 1. (12 bodova) Neka je dan niz

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \frac{5a_n - 6}{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ispitajte konvergira li niz (a_n) i ako da, odredite mu limes.

Rješenje. Pretpostavimo da niz konvergira i označimo limes sa L. Vrijedi

$$\begin{aligned} &L = \frac{5L - 6}{L} \\ &L^2 - 5L + 6 = 0 \\ &(L-2)(L-3) = 0 \end{aligned}$$

Dakle $L = 2$ ili 3.

Pokažimo indukcijom da je niz omeđen odozdo s 3. Za $n = 1$ imamo $a_1 = 4 > 3$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Pretpostavimo $a_n > 3$. Imamo

$$a_{n+1} = \frac{5a_n - 6}{a_n} = 5 - \frac{6}{a_n} > 3.$$

Pokažimo indukcijom da je niz padajući.

$$\begin{aligned} a_{n+1} \leq a_n &\iff \frac{5a_n - 6}{a_n} \geq a_n \\ &\iff a_n^2 - 5a_n + 6 \geq 0 \geq 0 \\ &\iff (a_n - 2)(a_n - 3) \geq 0. \end{aligned}$$

Dakle niz je konvergentan i limes mu je 3.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2024.

Zadatak 2.

(a) (8 bodova) Odredite limes:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^5} \sum_{k=n}^{2n} k^4$$

(b) (4 boda) Neka je $(a_n)_n$ niz takav da za sve $n \geq 2$ vrijedi da postoji $k \in [\frac{n}{2}, n)$ takav da je $a_n = \frac{a_k}{2}$. Dokažite da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Rješenje.

(a) Označimo li $a_n = \sum_{k=n}^{2n} k^4$ i $b_n = n^5$, vrijedi da je b_n rastuć i $b_n \to \infty$ za $n \to \infty$ pa su uvjeti Cesaro -Stolzovog teorema zadovoljeni i limes je jednak sljedećem limesu, ako on postoji:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^4 + (2n+2)^4 - (n+1)^4}{(n+1)^5 - n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{31n^4 + p_3(n)}{5n^4 + q_3(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{31 + \frac{p_3(n)}{n^4}}{5 + \frac{q_3(n)}{n^4}} = \frac{31}{5}$$

gdje smo sa p_3 i q_3 označili neke polinome, čiji koeficijenti nisu bitni budući da izrazi $\frac{p_3(n)}{n^4}$ i $\frac{p_3(n)}{n^4}$ svakako konvergiraju u 0. Dakle, traženi limes jednak je $\frac{31}{5}$.

(b) **1. način** Dokažimo indukcijom po n da za sve $m \in \mathbf{N}_0$ i $n \in [2^m, 2^{m+1})$ vrijedi $|a_n| \leq \frac{|a_1|}{2^m}$. Tvrdnja očito vrijedi za $n = 1$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve brojeve strogo manje od n za neki i dokažimo da onda vrijedi i za n.

Zapišimo $n = 2^l + s$ za neki $l \in \mathbf{N}_0$ i $s < 2^l$ (postojanje takvog rastava slijedi iz binarnog zapisa broja). Tada je $[\frac{n}{2}, n) \subset [2^{l-1}, n)$ pa za $k \in [\frac{n}{2}, n)$, vrijedi $k \in [2^{l-1}, 2^l)$ ili $k \in [2^l, 2^l + s)$.

U prvom slučaju je po pretpostavci indukcije

$$|a_n| = \frac{1}{2}|a_k| \leq \frac{1}{2}\frac{|a_1|}{2^{l-1}} = \frac{|a_1|}{2^l},$$

dok u drugom slučaju po pretpostavci indukcije vrijedi

$$|a_n| = \frac{1}{2}|a_k| \leq \frac{1}{2}\frac{|a_1|}{2^l} < \frac{|a_1|}{2^l}$$

pa je korak indukcije proveden u oba slučaja.

2. način Pretpostavimo da tvrdnja ne vrijedi, tj. da postoji neki podniz a_{n_k} takav da je $|a_{n_k}| \geq \varepsilon$. Neka je N proizvoljan i velik. Kako $n_k \to \infty$, to je $n_k > 2^N$ za neki k. Kako je $|a_{n_k}| > \varepsilon$, slijedi da postoji broj $m_1 \in [\frac{n_k}{2} \geq n_k - 1] \subset [2^{N-1}, n_k - 1]$ takav da je $|a_{m_1}| \geq 2\varepsilon$. Na isti način zaključujemo da postoji broj $m_2 \in [2^{N-2}, n_k - 2]$ takav da je $|a_{m_2}|$. Nakon nekih t koraka, gdje je $t \in [N, n_k]$, dolazimo do zaključka da je $|a_1| \geq 2^t\varepsilon \geq 2^N\varepsilon$ pa uzimajući N dovoljno velik dobivamo kontradikciju sa činjenicom da je a_1 neki fiksan realan broj.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2024.

Zadatak 3.

(a) (8 bodova) Odredite infimum i supremum skupa

$$A = \left\{ \frac{n + k^2}{2^n + k^2 + 1} : n, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

(b) (4 bodova) Neka je $f : (a - \varepsilon,\ b + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija u svim točkama (gdje je $\varepsilon > 0$ unaprijed zadan) te neka vrijedi $f(a) < f(b)$. Dokažite da postoje $c, d \in [a, b]$ takvi da $f(c) = f(a)$, $f(d) = f(b)$ te da

$$c < x < d \implies f(c) < f(x) < f(d).$$

Rješenje.

(a) Prvo, razmotrimo infimum skupa A. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + k^2}{2^n + k^2 + 1} = 0.$$

Budući da su n i k prirodni brojevi, izraz nikada neće biti negativan. Stoga, možemo zaključiti da je $\inf A = 0$. Sada ćemo razmotriti supremum skupa A. Kada je k vrlo velik, a n fiksan, izraz teži prema 1. To znači da će za dovoljno velike vrijednosti k, izraz

$$\frac{n + k^2}{2^n + k^2 + 1}$$

biti blizu 1. Da bismo pokazali da je 1 stvarno gornja granica, uočimo da za sve $n \in \mathbb{N}$, vrijedi da je $2^n + 1 > n$. To znači da je

$$2^n + k^2 + 1 > n + k^2.$$

Stoga, imamo

$$\frac{n + k^2}{2^n + k^2 + 1} < \frac{n + k^2}{n + k^2} = 1.$$

Ovo pokazuje da je 1 gornja granica za izraze u skupu A. Zaključujemo da je $\sup A = 1$.

(b) Promotrimo skup

$$A := \{x \in [a, b] : f(x) \leq f(a)\}.$$

Uočimo da je $A \neq \emptyset$ jer je $a \in A$ te da je b gornja ograda za taj skup. Označimo $c := \sup A$. Zbog neprekidnosti funkcije f u točki c, možemo zaključiti da je $f(c) = f(a)$. Naime, kada bismo imali $f(c) > f(a)$, postojao bi $\delta > 0$ takav da

$$x \in (c - \delta, c + \delta) \implies f(x) > f(a).$$

S druge strane, iz definicije supremuma, imamo da postoji $y \in A$ takav da

$$c - \frac{\delta}{2} < y.$$

Međutim, to je sada kontradikcija jer za takav y imamo da $f(y) \leq f(a)$ (jer je $y \in A$), a s druge strane prema prethodnoj implikaciji imamo da $f(y) > f(a)$. Slično, kada bismo imali $f(c) < f(a)$, iz neprekidnosti bismo imali da postoji $\delta > 0$ takav da

$$x \in (c - \delta, c + \delta) \implies f(x) < f(a).$$

Sada, ako uzmemo $y = c + \delta/2$, tada je $f(y) < f(a)$, što implicira da je $y \in A$. To je kontradikcija s činjenicom da je $c = \sup A$. Dakle, mora vrijediti $f(c) = f(a)$. Analognom analizom skupa

$$B := \{x \in [a, b] : f(x) \geq f(a)\}$$

možemo zaključiti da za $d := \inf(B)$ vrijedi $f(d) = f(b)$. Sada, ako uzmemo $c < x < d$, imamo da $x \notin A$ te $x \notin B$, pa zaključujemo $f(c) < f(x) < f(d)$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2024.

Zadatak 4.

(a) (8 bodova) Odredite

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}(e^{\frac{\sin(x)}{x}} - 1)$$

(b) (4 boda) Neka je $\alpha > 0$ i $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcija takva da za sve $x \in \mathbf{R}$ vrijedi $|f(x) - x| \le |x|^{1+\alpha}$. Dokažite da postoji sljedeći limes i odredite ga

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{f(x)} - 1}{x}.$$

(c) (2 boda) Nađite primjer **neprekidne** funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koja zadovoljava $|f(x) - x| \le |x|$ za sve $x \in \mathbf{R}$, ali za koju limes iz prethodnog podzadatka ne postoji.

Rješenje.

(a) Vrijedi $0 \le |\frac{\sin(x)}{x}| \le \frac{1}{|x|}$ pa po teoremu o sendviču $\frac{\sin x}{x} \to 0$. Prema tome, izraz je jednak

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \frac{e^{\frac{\sin x}{x}} - 1}{\frac{\sin x}{x}}.$$

Po teoremu o sendviču vrijedi $\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \to 0$, pa koristeći limes $\frac{e^t - 1}{t} = 1$ i teorem o limesu produkta zaključujemo da je traženi limes jednak $0 \cdot 1 = 0$.

(b) Po uvjetu zadatka iz nejednakosti trokuta zaključujemo:

$$0 \le |f(x)| \le |f(x) - x| + |x| \le |x|^{1+\alpha} + |x|$$

pa iz teorema o sendviču slijedi $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Koristeći $\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ slijedi

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{f(x)} - 1}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \ln 2 \frac{e^{f(x)\ln 2} - 1}{f(x)\ln 2} = \ln 2.$$

Prema tome, da pokažemo da limes postoji, po propoziciji o limesu produkta, dovoljno je dokazati da postoji limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x},$$

ali po uvjetu vrijedi

$$0 \le \left| \frac{f(x)}{x} - 1 \right| \le |x|^{\alpha}$$

pa koristeći teorem o sendviču zaključujemo da je traženi limes jednak jedan. Konačno, zaključujemo da je traženi limes jednak

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{f(x)} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2^{f(x)} - 1}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} = \ln 2$$

(c) Uvjet zadatka ekvivalentan je s:

$$\left|\frac{f(x)}{x} - 1\right| \leq 1$$

pa je dovoljno odabrati da izraz unutar apsolutne vrijednosti bude omeđena funkcija koja je neprekidna na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ i koja nema limes u 0. U točki 0 stavit ćemo bilo što. Definiramo na primjer

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Funkcija je neprekidna na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ jer su konstantna i linearna funkcija neprekidne, dok iz

$$0 \leq |f(x)| \leq 2|x|$$

i teorema o sendviču slijedi neprekidnost u 0. Tražena nejednakost u zadatku također očito slijedi iz definicije funkcije:

$$|2x - x| \leq |x| \quad \text{i} \quad |0 - x| \leq |x|.$$

S druge strane, izraz

$$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

očito nema limes u 0 jer su limesi s lijeva i s desna različiti. Prema tome, kao u prethodnom dijelu vrijedi

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2^{f(x)} - 1}{x} = 2 \ln 2 \neq 0 = \lim_{x \to 0^-} \frac{2^{f(x)} - 1}{x}$$

Napomena. Ukoliko želimo pokazati da ne postoje čak ni jednostrani limesi, definiramo

$$f(x) := \begin{cases} x + x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Tada je f neprekidna na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ zbog toga što je kompozicija neprekidnih funkcija. Za neprekidnost točki 0 za $x \neq 0$ računamo:

$$|f(x) - f(0)| = |x + x \sin(\frac{1}{x})| \leq 2|x|$$

pa po teoremu o sendviču vrijedi da je funkcija neprekidna u 0. S druge strane, izraz

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

nema limes budući da za nizove $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ i $y_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}$ koji konvergiraju u 0 s pozitivne strane vrijedi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{x} = 1 + \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = \lim_{n \to \infty} 2 = 2$$
$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{x} = 1 + \sin(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2024.

Zadatak 1. (12 bodova) Neka je dan niz

$$b_1 = 5, \quad b_{n+1} = \frac{6b_n - 8}{b_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ispitajte konvergira li niz (b_n) i ako da, odredite mu limes.

Rješenje. Pretpostavimo da niz konvergira i označimo limes sa L. Vrijedi

$$\begin{aligned} &L = \frac{6L-8}{L} \\ &L^2 - 6L + 8 = 0 \\ &(L-2)(L-4) = 0 \end{aligned}$$

Dakle $L = 2$ ili 4.

Pokažimo indukcijom da je niz omeđen odozdo s 4. Za $n = 1$ imamo $b_1 = 5 > 4$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Pretpostavimo $b_n > 4$. Imamo

$$b_{n+1} = \frac{6b_n - 8}{b_n} = 5 - \frac{6}{b_n} > 4.$$

Pokažimo indukcijom da je niz padajući.

$$\begin{aligned} b_{n+1} \leq b_n &\iff \frac{6b_n - 8}{b_n} \geq b_n \\ &\iff b_n^2 - 6b_n + 8 \geq 0 \\ &\iff (b_n - 2)(b_n - 4) \geq 0. \end{aligned}$$

Dakle niz je konvergentan i limes mu je 4.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2024.

Zadatak 2.

(a) (8 bodova) Odredite limes:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^6} \sum_{k=n}^{2n} k^5$$

(b) (4 bodova) Neka je $(b_n)_n$ niz takav da za sve $n \geq 2$ vrijedi da postoji $k \in [\frac{n}{3}, n)$ takav da je $b_n = \frac{b_k}{2}$. Dokažite da je $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Rješenje.

(a) Označimo li $a_n = \sum_{k=n}^{2n} k^5$ i $b_n = n^6$, vrijedi da je b_n rastuć i $b_n \to \infty$ za $n \to \infty$ pa su uvjeti Cesaro -Stolzovog teorema zadovoljeni i limes je jednak sljedećem limesu, ako on postoji:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^5 + (2n+2)^5 - (n+1)^5}{(n+1)^6 - n^6} = \lim_{n\to\infty} \frac{63n^5 + p_4(n)}{6n^5 + q_4(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{63 + \frac{p_4(n)}{n^5}}{6 + \frac{q_4(n)}{n^4}} = \frac{21}{2}$$

gdje smo sa p_4 i q_4 označili neke polinome, čiji koeficijenti nisu bitni budući da izrazi $\frac{p_4(n)}{n^5}$ i $\frac{p_4(n)}{n^5}$ svakako konvergiraju u 0. Dakle, traženi limes jednak je $\frac{21}{2}$.

(b) **1. način** Dokažimo indukcijom po n da za sve $m \in \mathbf{N}_0$ i $n \in [3^m, 3^{m+1})$ vrijedi $|a_n| \leq \frac{|a_1|}{2^m}$. Tvrdnja očito vrijedi za $n = 1$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve brojeve strogo manje od n za neki i dokažimo da onda vrijedi i za n.

Zapišimo $n = 3^l + s$ za neki $l \in \mathbf{N}_0$ i $s < 2 \cdot 3^l$ (postojanje takvog rastava slijedi iz zapisa broja u bazi 3). Tada je $[\frac{n}{3}, n) \subset [3^{l-1}, n)$ pa za $k \in [\frac{n}{3}, n)$, vrijedi $k \in [3^{l-1}, 3^l)$ ili $k \in [3^l, 3^l + s)$.

U prvom slučaju je po pretpostavci indukcije

$$|a_n| = \frac{1}{2}|a_k| \leq \frac{1}{2}\frac{|a_1|}{2^{l-1}} = \frac{|a_1|}{2^l},$$

dok u drugom slučaju po pretpostavci indukcije vrijedi

$$|a_n| = \frac{1}{2}|a_k| \leq \frac{1}{2}\frac{|a_1|}{2^l} < \frac{|a_1|}{2^l}$$

pa je korak indukcije proveden u oba slučaja.

2. način analogan je kao i u prvoj grupi uz modifikacije kao u 1. načinu za ovu grupu.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2024.

Zadatak 3.

(a) (8 bodova) Odredite infimum i supremum skupa

$$A = \left\{ \frac{n^2 + k^4}{3^n + k^4 + 2} : n, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

(b) (4 boda) Neka je $f : (a - \varepsilon,\ b + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija u svim točkama (gdje je $\varepsilon > 0$ unaprijed zadan) te neka vrijedi $f(a) > f(b)$. Dokažite da postoje $c, d \in [a, b]$ takvi da $f(c) = f(a)$, $f(d) = f(b)$ te da

$$c < x < d \implies f(c) > f(x) > f(d).$$

Rješenje.

(a) Prvo, razmotrimo infimum skupa A. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + k^4}{3^n + k^4 + 2} = 0.$$

Budući da su n i k prirodni brojevi, izraz nikada neće biti negativan. Stoga, možemo zaključiti da je $\inf A = 0$. Sada ćemo razmotriti supremum skupa A. Kada je k vrlo velik, a n fiksan, izraz teži prema 1. To znači da će za dovoljno velike vrijednosti k, izraz

$$\frac{n^2 + k^4}{3^n + k^4 + 2}$$

biti blizu 1. Da bismo pokazali da je 1 stvarno gornja granica, uočimo da za sve $n \in \mathbb{N}$, vrijedi da je $3^n + 2 > n^2$. To znači da je

$$3^n + k^4 + 2 > n^2 + k^4.$$

Stoga, imamo

$$\frac{n^2 + k^4}{3^n + k^4 + 2} < \frac{n^2 + k^4}{n^2 + k^4} = 1.$$

Ovo pokazuje da je 1 gornja granica za izraze u skupu A. Zaključujemo da je $\sup A = 1$.

(b) Promotrimo skup

$$A := \{x \in [a, b] : f(x) \geq f(a)\}.$$

Uočimo da je $A \neq \emptyset$ jer je $a \in A$ te da je b gornja ograda za taj skup. Označimo $c := \sup A$. Zbog neprekidnosti funkcije f u točki c, možemo zaključiti da je $f(c) = f(a)$. Naime, kada bismo imali $f(c) < f(a)$, postojao bi $\delta > 0$ takav da

$$x \in (c - \delta, c + \delta) \implies f(x) < f(a).$$

S druge strane, iz definicije supremuma, imamo da postoji $y \in A$ takav da

$$c - \frac{\delta}{2} < y.$$

Međutim, to je sada kontradikcija jer za takav y imamo da $f(y) \geq f(a)$ (jer je $y \in A$), a s druge strane prema prethodnoj implikaciji imamo da $f(y) < f(a)$. Slično, kada bismo imali $f(c) > f(a)$, iz neprekidnosti bismo imali da postoji $\delta > 0$ takav da

$$x \in (c - \delta, c + \delta) \implies f(x) > f(a).$$

Sada, ako uzmemo $y = c + \delta/2$, tada je $f(y) > f(a)$, što implicira da je $y \in A$. To je kontradikcija s činjenicom da je $c = \sup A$. Dakle, mora vrijediti $f(c) = f(a)$. Analognom analizom skupa

$$B := \{x \in [a, b] : f(x) \leq f(a)\}$$

možemo zaključiti da za $d := \inf(B)$ vrijedi $f(d) = f(b)$. Sada, ako uzmemo $c < x < d$, imamo da $x \notin A$ te $x \notin B$, pa zaključujemo $f(c) > f(x) > f(d)$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2024.

Zadatak 4.

(a) (8 bodova) Odredite

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}(e^{\frac{\sin(x)}{x}} - 1)$$

(b) (4 boda) Neka je $\alpha > 0$ i $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcija takva da za sve $x \in \mathbf{R}$ vrijedi $|f(x) - x| \leq |x|^{1+\alpha}$. Dokažite da postoji sljedeći limes i odredite ga

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{f(x)} - 1}{x}.$$

(c) (2 boda) Nađite primjer **neprekidne** funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koja zadovoljava $|f(x) - x| \leq |x|$ za sve $x \in \mathbf{R}$, ali za koju limes iz prethodnog podzadatka ne postoji.

Rješenje.

(a) Kao u prvoj grupi.

(b) Kao u prvoj grupi, samo se koristi da je $\lim_{t\to 0} \frac{3^t - 1}{t} = \ln 3$

(c) Kao u prvoj grupi.