POGLAVLJE 2

Nizovi

2.1. Općenito o nizovima

DEFINICIJA 2.1. Niz je je funkcija $a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$. Varijabla se obično piše u indeksu kao a_n. Oznake: (a_n), $(a_n)_n$.

PRIMJER 2.2 (Gaussova dosjetka). Sumu $S_n = 1+2+\cdots+n$ možemo izračunati na sljedeći način. Zbrajanjem sljedeća dva retka

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$
$$S_n = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$$

dobijemo

$$2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n \quad \text{sumanada}} = n(n+1),$$

odakle je $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

PRIMJER 2.3. (a) Aritmetički niz s prvim članom a_1 i razlikom d je niz (a_n) zadan općim članom:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Svojstva:

- $a_{n+1} - a_n = d$,
- $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, $n \geq 2$ (zbog čega se i zove aritmetički niz),
- $S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, jer je

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d) \\ &= n \cdot a_1 + (1 + 2 + \cdots + (n-1))d \\ &= n \cdot a_1 + \frac{(n-1)n}{2} d \\ &= \frac{n}{2}\big(2a_1 + (n-1)d\big) \\ &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n). \end{aligned}$$

(b) **Geometrijski niz** s prvim članom a_1 i koeficijentom $q \neq 1$ je niz (a_n) zadan općim članom:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Svojstva:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$,
- $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}, \quad n \geq 2 \quad$ (zbog čega se i zove geometrijski niz),

- $S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ slijedi iz tzv. trika *teleskopiranja:*

$$\begin{aligned} 1-q &= (1-q)\cdot 1 \\ q-q^2 &= (1-q)\cdot q \\ q^2-q^3 &= (1-q)\cdot q^2 \\ &\vdots \\ q^n-q^{n+1} &= (1-q)\cdot q^n \end{aligned}$$

Zbrajanjem obje strane vidimo da ostane:

$$1-q^{n+1} = (1-q)(1+q+\cdots+q^n),$$

iz čega slijedi:

$$1+q+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Uvrštavanjem $q = \frac{b}{a}$ i množenjem obje strane sa a^n dobijemo poznatu formulu:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Zadatak 2.4. Izračunajte:

(a) $1+4+7+\cdots+(3n+1)$ (b) $1-\frac{2}{5}+\frac{4}{25}-\cdots+\left(-\frac{2}{5}\right)^n$ (c) $1+4+9+\cdots+n^2$.

Rješenje. (c) Primijetimo da je

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

pa sumiranjem po $k = 1, 2, \ldots, n$ dobijemo

$$(n+1)^3 - 1 = 3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) + 3(1+2+\cdots+n) + n,$$

odakle je

$$1+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

□

Rastuće i padajuće funkcije definirali smo u prvom poglavlju. Sljedeći rezultat daje operativniju karakterizaciju rastućih i padajućih nizova

Lema 2.5. *Niz (a_n) je rastuć ako i samo ako za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi*

$$a_n \le a_{n+1}.$$

Niz (a_n) je padajuć ako i samo ako za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$a_n \ge a_{n+1}.$$

Niz je strogo rastuć, tj. strogo padajuć ako i samo ako su nejednakosti u definicijama stroge.

DOKAZ. Dokažimo ekvivalenciju za rastuće nizove, ostalo ostavljamo za vježbu.

Pretpostavimo da je niz (a_n) rastuć. Neka je $n \in \mathbf{N}$ proizvoljan. Kako je $n < n+1$, tada iz definicije rastuće funkcije vrijedi $a_n \leq a_{n+1}$.

Za obratnu implikaciju pretpostavimo da za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi $a_n \leq a_{n+1}$ i dokažimo indukcijom po $k \in \mathbf{N}$ da za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi $a_n \leq a_{n+k}$. To je očito ekvivalentno s tvrdnjom da za sve $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$, takve da je $n_1 < n_2$ vrijedi $a_{n_1} \leq a_{n_2}$.

Za $k = 1$ tvrdnja $a_n \leq a_{n+1}$ slijedi iz pretpostavke tvrdnje. Pretpostavimo li da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbf{N}$, tada po pretpostavci indukcije i pretpostavci same tvrdnje vrijedi:

$$a_n \leq a_{n+k} \leq a_{n+k+1}$$

pa smo dokazali korak indukcije. Prema tome, dokazana je tvrdnja za sve $k \in \mathbf{N}$. □

ZADATAK 2.6. Ispitajte monotonost sljedećih nizova:

(a) $a_n = \frac{n-1}{n}$

(b) $a_n = n^2$

(c) $a_n = 2^{-n}$

(d) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(e) $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+9}$

(f) $a_n = \mathrm{arctg}(\frac{1-n}{1+n})$

(g) $a_n = \frac{n^2+1}{3n^2+n}$

RJEŠENJE. Podzadatke (a-c), (e) i (f) zapišemo kao kompoziciju monotonih funkcija.

(d)
$$a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}},$$
što je padajuća funkcija kao kompozicija padajuće funkcije $x \mapsto \frac{1}{x}$ na $(0, \infty)$ i rastuće funkcije $x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$, koja je rastuća kao zbroj rastućih.

(g) $a_{n+1} - a_n = \frac{n^2-5n-4}{n(3n+1)(n+1)(3n+4)}$. Dakle, niz je rastuć za $n \geq 6$ (formalno, rekli bismo da je niz $(a_{n+5})_n$ rastuć).

□

DEFINICIJA 2.7. Niz (a_n) je **odozgo omeđen** ako postoji $M \in \mathbf{R}$ takav da za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$a_n \leq M.$$

Niz (a_n) je **odozdo omeđen** ako postoji $m \in \mathbf{R}$ takav da za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$a_n \geq m.$$

Niz je **omeđen** ako je odozgo i odozdo omeđen.

ZADATAK 2.8. Ispitajte omeđenost nizova

(a) $a_n = \frac{n-1}{n}$

(b) $a_n = 2^n$

(c) $a_n = \sqrt{n}$

RJEŠENJE. (b) Matematičkom indukcijom slijedi da je $2^n \geq n$. Naime, tvrdnja vrijedi za $n = 1$, a korak indukcije slijedi iz:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n \geq n + 1.$$

Sada za proizvoljan $M > 0$ po Arhimedovom aksiomu postoji $n_0 > M$ pa je $a_{n_0} = 2^{n_0} \geq n_0 > M$. Dakle, niz nije odozgo omeđen.

(c) Pretpostavimo da je (a_n) omeđen, što znači da postoji $M > 0$ takav da je $\sqrt{n} \leq M$ za sve $n \in \mathbf{N}$. Međutim, djelovanjem funkcijom $x \mapsto x^2$, koja je rastuća na $[0, \infty)$, odatle bi slijedilo da je $n \leq M^2$ za sve $n \in \mathbf{N}$. To je kontradikcija sa Arhimedovim aksiomom pa zaključujemo da je niz a_n neomeđen odozgo. Omeđenost odozdo je očita.

□

2.2. Limesi - osnovna svojstva

Definicija 2.9. Niz (a_n) konvergira k $L \in \mathbf{R}$ ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|a_n - L| < \epsilon.$$

U tom slučaju kažemo da je niz **konvergentan**. Na predavanju se pokaže da je takav L, ako postoji, jedinstven i zovemo ga **limes** niza (a_n) te označavamo s

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Definicija 2.10. Niz (a_n) **teži k** $+\infty$ ako za svaki $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$a_n > M$$

i pišemo $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Niz (a_n) **teži k** $-\infty$ ako za svaki $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$a_n < -M$$

i pišemo $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Definiramo $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Niz (a_n) *konvergira* u $\overline{\mathbb{R}}$ ako konvergira u $\mathbb{R}$ ili teži k $-\infty$ ili k $+\infty$.

Zadatak 2.11. Dokažite po definiciji da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Rješenje. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Želimo dokazati da postoji n_0 takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \epsilon,$$

što je ekvivalentno s

$$\frac{1}{n^2} < \epsilon.$$

Međutim, kako za $n \geq 1$ vrijedi $n^2 \geq n$, slijedi da je

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$$

pa je dovoljno pokazati da postoji n_0 takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $\frac{1}{n} < \epsilon$. Međutim, po Arhimedovom aksiomu slijedi da postoji n_0 takav da je $n_0\epsilon > 1$ pa za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$n\epsilon \geq n_0\epsilon > 1$$

i time je tvrdnja dokazana.

Napomena. Nejednakost $\frac{1}{n^2} < \epsilon$ može se zapisati i kao $n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ pa bi tada izbor $n_0 = \lceil \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \rceil$ bio dobar, međutim u takvom rješenju implicitno koristimo činjenicu da korijen iz svakog realnog broja postoji, što je rezultat koji će biti dokazan tek na kraju kolegija. □

Sljedeća nejednakost poopćenje je zadatka 2.8 i vrlo se često koristi u ocjenama.

Zadatak 2.12 (Bernoullijeva nejednakost). Za $x \geq 0$ i $n \in \mathbf{N}$ dokažite da vrijedi

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Rješenje. Tvrdnja slijedi iz binomnog teorema.

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{x^k}_{\geq 0} \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x = 1 + nx.$$

□

Napomena. Prethodna nejednakost vrijedi i ako prirodan broj n zamijenimo proizvoljnim realnim brojem $r \geq 1$, ali dokaz je nešto kompliciraniji budući da se izraz $(1+x)^r$ definira kao $e^{r\ln(1+x)}$.

Zadatak 2.13. Dokažite da za $q > 1$ vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty.$$

Rješenje. Koristeći Bernoullijevu nejednakost za $x = q - 1$ vrijedi:

$$q^n = (1 + (q-1))^n \geq 1 + n(q-1).$$

Neka je sada $M > 0$ proizvoljan. Koristeći Arhimedov aksiom slijedi da postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da je $n_0(q-1) > M$. Dakle, za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $1 + n(q-1) > M$. □

Zadatak 2.14. Neka je $q \in (-1, 1)$. Dokažite da je

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Rješenje. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Trebamo pokazati da postoji n_0 tako da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|q^n| < \epsilon$. Kako je $|q| < 1$, postoji $x > 0$ takav da je

$$|q| = \frac{1}{1+x}.$$

Sada iz Bernoullijeve nejednakosti slijedi:

$$|q|^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx} < \frac{1}{nx}.$$

Konačno, koristeći Arhimedov aksiom slijedi da postoji n_0 takav da je $n_0 x\epsilon > 1$ pa za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|q|^n \leq \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n_0 x} < \epsilon.$$

Prema tome, slijedi tvrdnja. □

Zadatak 2.15. Dokažite da niz $a_n = (-1)^n$ ne konvergira.

Rješenje. Pretpostavimo da niz konvergira ka nekom $L \in \mathbf{R}$. Tada za $\epsilon = \frac{1}{2}$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$|a_n - L| < \frac{1}{2}.$$

Tada korištenjem navedene ocjene za $n = n_0$ i $n = n_0 + 1$ i nejednakosti trokuta slijedi:

$$2 = |(-1)^{n_0} - (-1)^{n_0+1}| = |a_{n_0} - a_{n_0+1}| \leq |a_{n_0} - L| + |L - a_{n_0+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Međutim, time smo očito došli do kontradikcije pa niz ne konvergira. □

Kao što vidimo, dokazi po definiciji su relativno mukotrpni već za jednostavne primjere pa je za račun korisno dokazati najprije neke osnovne operacije sa limesima. Na predavanju se pokaže sljedeće.

Teorem 2.16. *Neka su (a_n) i (b_n) konvergentni nizovi te $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Tada vrijedi sljedeće*

(i) Niz $(\lambda a_n + \mu b_n)$ je konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n + \mu \lim_{n\to\infty} b_n$$

(ii) Niz $(a_n \cdot b_n)$ je konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

(iii) Ako je $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, tada je i niz $(\frac{a_n}{b_n})$ konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

Napomena. U prethodnom teoremu izuzetno je važan poredak implikacija. Naime, ni jedna od jednakosti ne mora vrijediti ako ne znamo da su nizovi (a_n) i (b_n) konvergentni. Naime, za

$$a_n = (-1)^n \quad b_n = (-1)^{n+1}$$

niz $(a_n + b_n)$ jednak je konstantno jednak 0 pa konvergira u 0, ali ne vrijedi jednakost za zbrajanje jer limesi $\lim_{n\to\infty} a_n$ i $\lim_{n\to\infty} b_n$ ne postoje.

Zadatak 2.17. Dokažite da su sljedeći nizovi konvergentni i izračunajte limese.

(a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{5n-1}{3n+2}$

(b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)^3(n^2+n+1)^2}{n^7-50n+5}$

(c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^5-(n-1)^5}{(n+1)^4}$

(d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.

Rješenje. (a) Dijeljenjem brojnika i nazivnika sa vodećim članom n, te korištenjem teorema 2.16 slijedi:

$$\frac{5n-1}{3n+2}=\frac{5-\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{3+\underset{\to 0}{\frac{2}{n}}}\to\frac{5-0}{3+0}=\frac{5}{3}.$$

(b) Dijeljenjem brojnika i nazivnika sa n^7 te korištenjem teorema 2.16 slijedi

$$\frac{(n+2)^3(n^2+n+1)^2}{n^7-50n+5}=\frac{(1+\frac{2}{n})^3(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^2}{1-\frac{50}{n^6}+\frac{5}{n^7}}\to 1$$

(c) Korištenjem binomnog teorema slijedi

$$\frac{n^5-(n-1)^5}{(n+1)^4}=\frac{5n^4+p_3(n)}{n^4+q_3(n)},$$

gdje su p_3, q_3 polinomi trećeg stupnja (koje ne trebamo računati). Dijeljenjem brojnika i nazivnika sa n^4 te korištenjem teorema 2.16 slijedi da je limes jednak 5.

(d) Korištenjem formule za prvih n prirodnih brojeva i teorema 2.16 slijedi

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\frac{n(n+1)}{2n^2}\to\frac{1}{2}.$$

Napomena. Ovaj limes mogli smo pokušati riješiti na sljedeći način. Najprije ga zapišemo kao

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$$

i primijetimo da svaki član zbroja konvergira u 0. Konačno, htjeli bismo zaključili da tada cijeli zbroj konvergira u 0 po teoremu 2.16 o limesu zbroja.

Međutim, takvo zaključivanje je krivo! Naime, teorem o limesu zbroja vrijedi kada je broj sumanada konačan. U ovom primjeru broj sumanada raste u beskonačnost pa očito dobijemo pogrešan zaključak takvim zaključivanjem.

□

Zadatak 2.18. Dokažite da su sljedeći nizovi konvergentni i izračunajte limese.

(a) $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n-2}}{2^n-2}$ (b) $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n+3^n}{1+3^n}$ (c) $\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n+6^n}{2^n+(-7)^n}$

Rješenje. (a-b) Podijelimo brojnik i nazivnik sa dominantnim članom

(c) Podijelimo brojnik i nazivnik sa najbrže rastućom funkcijom: $(-7)^n$ i iskoristimo 2.14 te teorem 2.16 da zaključimo

$$\frac{3^n+6^n}{2^n+(-7)^n}=\frac{(-\frac{3}{7})^n+(-\frac{6}{7})^n}{(-\frac{2}{7})^n+1}\to 0.$$

□

Zadatak 2.19. Dokažite sljedeće tvrdnje.

(a) Za sve $a>0$ vrijedi:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1$$

(b)

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

RJEŠENJE. (a) Neka je najprije $a \geq 1$.

Neka je dan $\epsilon > 0$. Iz Zadatka 2.13 za $q = 1 + \epsilon$ slijedi da postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$1 \leq a \leq (1+\epsilon)^n.$$

Za proizvoljan $n \geq n_0$, primjenom rastuće funkcije $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ dobivamo

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq 1 + \epsilon,$$

dakle $|\sqrt[n]{a} - 1| \leq \epsilon$.

Za slučaj $a < 1$ iskoristimo činjenicu da je $\frac{1}{a} > 1$ i teorem 2.16 da zaključimo da je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

(b) Neka je dan $\epsilon > 0$. Uočimo da za proizvoljan $n \geq 2$ iz binomnog teorema slijedi

$$(1+\epsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \epsilon^k > \binom{n}{2} \epsilon^2.$$

Dakle, ukoliko je $\binom{n}{2}\epsilon^2 \geq n$, tada će biti

$$1 \leq n \leq (1+\epsilon)^n,$$

odakle će uzimanjem n-tih korijena analogno kao u podzadatku (a) slijediti

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \epsilon,$$

a time i $|\sqrt[n]{n} - 1| \leq \epsilon$. No, uočimo da za $n \geq 2$ imamo ekvivalenciju

$$\binom{n}{2} \epsilon^2 \geq n \iff n \geq 1 + \frac{2}{\epsilon^2}.$$

Dakle, odaberemo li $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da $n_0 > 1 + \frac{2}{\epsilon^2}$, tada za sve $n \geq n_0$ imamo $|\sqrt[n]{n} - 1| \leq \epsilon$, čime je tvrdnja dokazana.

□

Pri računanju limesa često koristimo sljedeći teorem.

TEOREM 2.20 (Teorem o sendviču). *Neka su (a_n), (b_n) i (c_n) nizovi takvi da postoji $m \in \mathbf{N}$ tako da za sve $n \geq m$ vrijedi*

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Ako (a_n) i (c_n) konvergiraju ka istom broju L, tada i (b_n) konvergira ka L.

ZADATAK 2.21. Dokažite da su sljedeći nizovi konvergentni i izračunajte limese.

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 \cos n + 8n}{n^3+1}$ (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor n\sqrt{2} \rfloor}{n}$

Rješenje. (a) Primijetimo da je

$$0 \leq \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}.$$

Kako $\frac{1}{n} \to 0$, Teorem o sendviču povlači da $|\frac{\sin n}{n}| \to 0$, što po definiciji konvergencije u 0 implicira $\frac{\sin n}{n} \to 0$

(b) Primijetimo da je

$$\left|\frac{5n^2 \cos n + 8n}{n^3+1}\right| \leq \frac{5n^2 + 8n}{n^3+1}.$$

Podijelimo li brojnik i nazivnik prvog i zadnjeg limesa sa n^3, tvrdnja slijedi iz teorema 2.16 i teorema o sendviču.

(c) Za svaki $x \in \mathbf{R}$ po definiciji funkcije najveće cijelo vrijedi $\lfloor x \rfloor \leq x$ i $x < \lfloor x \rfloor + 1$ jer je $\lfloor x \rfloor$ najveći cijeli broj koji je manji ili jednak x. Odatle slijedi

$$\frac{n\sqrt{2}-1}{n} \leq \frac{\lfloor n\sqrt{2} \rfloor}{n} \leq \frac{n\sqrt{2}}{n}.$$

Kako i prvi i posljednji izraz u gornjem nizu nejednakosti konvergiraju u $\sqrt{2}$, korištenjem teorema o sendviču slijedi $\frac{\lfloor n\sqrt{2} \rfloor}{n} \to \sqrt{2}$.

□

Zadatak 2.22. Dokažite da sljedeći limesi postoje i izračunajte ih

(a) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$ (b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{(10+3\cos n)^n + 6^n}{(10+3\cos n)^n + 3^n}$

Rješenje. (a) Za $n \geq 1$ vrijedi

$$4 = \sqrt[n]{4^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \leq \sqrt[n]{3 \cdot 4^n} = 4\sqrt[n]{3} \to 4, \qquad n \to +\infty$$

pa je po teoremu o sendviču traženi limes jednak 4.

(b) Za $n \geq 1$ vrijedi

$$1 \leq \frac{(10+3\cos n)^n + 6^n}{(10+3\cos n)^n + 3^n} \leq 1 + \frac{6^n}{(10+3\cos n)^n} \leq 1 + \frac{6^n}{7^n} \to 1, \qquad n \to +\infty$$

pa je po teoremu o sendviču traženi limes jednak 1.

□

Sljedeći zadatak govori o brzini rasta elementarnih funkcija.

Zadatak 2.23. Dokažite sljedeće.

(a) Za svaki $a > 1$ i $k \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

(b) Za svaki $a > 1$ vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

To posebno znači da eksponencijalna funkcija raste "neusporedivo" brže od svake potencije i da funkcija faktorijel raste "neusporedivo" brže od eksponencijalne funkcije.

Rješenje. (a) Neka je $x \geq 0$ i $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da je $n_0 \geq 2k$. Tada je svakako $n_0 \geq k+1$ pa za svaki $n \geq n_0$ iz binomnog teorema slijedi

$$(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j \geq \binom{n}{k+1} x^{k+1}.$$

Iskoristimo li sada ocjenu $n - k \geq n - \frac{n_0}{2} \geq \frac{n}{2}$, binomni koeficijent možemo ocijeniti s:

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!} \geq \frac{(n-k)^{k+1}}{(k+1)!} \geq \frac{n^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!}.$$

Primjenom gore navedenih ocjena na nazivnik slijedi:

$$0 \leq \frac{n^k}{a^n} \leq \frac{n^k}{\frac{n^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!}(a-1)^{k+1}} = \frac{2^{k+1}(k+1)!}{(a-1)^{k+1}n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Dakle, korištenjem teorema o sendviču, traženi limes je jednak 0.

(b) Odaberimo $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da je $n_0 > a$. Koristeći ocjenu $\frac{a}{k} \leq \frac{a}{n_0}$ za $k > n_0$ te ocjenu $\frac{a}{k} \leq a$ za $k \leq n_0$, dobivamo da za svaki $n > n_0$ vrijedi:

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \frac{a}{k} \leq a^{n_0} \cdot \left(\frac{a}{n_0}\right)^{n-n_0} = n_0^{n_0} \cdot \left(\frac{a}{n_0}\right)^{n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

gdje smo za limes na desnoj strani iskoristili činjenicu da je $0 < \frac{a}{n_0} < 1$ i zadatak 2.14. Dakle, po teoremu o sendviču limes postoji i jednak je 0.

□

Napomena. Primijetimo da su prethodne tvrdnje "samo-pojačavajuće" u smislu da daju i asimptotske ocjene iz samih tvrdnji da konvergiraju u 0. Naime, ako niz konvergira, onda je i ograničen. Neka je k fiksan i $j \in \mathbf{N}$ proizvoljan. Koristeći prethodnu tvrdnju i prvi dio zadatka za potenciju $k+j$ slijedi da postoji $C_{k,j} > 0$ takav da je

$$\frac{n^{k+j}}{a^n} \leq C_{k,j},$$

ali odatle slijedi ocjena

$$\frac{n^k}{a^n} \leq \frac{C_{k,j}}{n^j}.$$

Dakle, izraz asimptotski pada brže od bilo koje potencije od n. Međutim, možemo dobiti i asimptotski bolju ocjenu. Naime, koristeći prvi dio zadatka za bilo koji $b \in (1, a)$ slijedi da postoji $C_b > 0$ takav da je

$$\frac{n^k}{b^n} \leq C_b.$$

Odatle slijedi:

$$\frac{n^k}{a^n} \leq C_b \left(\frac{b}{a}\right)^n,$$

što znači da navedeni izraz asimptotski pada brže od q^n za bilo koji $q > \frac{1}{a}$.

Zadatak 2.24 (DZ). Dokažite da za svaki $q < 1$ postoji konstanta C_q takva da je

$$\frac{a^n}{n!} \leq C_q q^n.$$

ZADATAK 2.25. Dokažite da sljedeći limesi postoje i izračunajte ih.

(a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4+3^n}{n^3+4^n}$

(b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n!}{(n-1)!+2n!}$

(c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+4}+n\cdot(-4)^{n+2}}{2^n+n\cdot(-4)^n}$

(d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{4^n(n+1)^4+5^n n^2(3n^2+1)}{5^n(n+1)^4}$.

Na predavanju se dokažu sljedeći rezultati.

TEOREM 2.26. *Za svaki $x \in \mathbf{R}$ postoji limes*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

i njega označavamo sa e^x.

TEOREM 2.27. *Ako je $f : \mathcal{D} \to \mathbf{R}$ elementarna funkcija ili inverz elementarne funkcije, ona je neprekidna je na prirodnoj domeni. To posebno znači sljedeće. Ako je $a \in \mathcal{D}$ i (a_n) niz realnih brojeva takav da je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, tada vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a).$$

Napomena. Iz prethodnog teorema primijenjenog na funkciju $f(x) = x^2$ slijedi da ako (a_n) konvergira i vrijedi $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, tada vrijedi da i niz (a_n^2) konvergira i vrijedi $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = L^2$. Međutim, obrat ne vrijedi. Naime, niz (a_n) $a_n = (-1)^n$ ne konvergira, dok niz $(a_n^2)_n$ očito konvergira k 1. To nije kontradikcija s prethodnim teoremom primijenjenim na funkciju $x \mapsto \sqrt{x}$ zbog toga što nije istina da je $a_n = \sqrt{a_n^2}$.

DEFINICIJA 2.28. Niz (b_n) je **podniz** niza (a_n) ako postoji strogo rastuća funkcija $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takva da za sve $n \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$b_n = a_{p_n}.$$

ZADATAK 2.29. Neka su (a_n) i (b_n) nizovi takvi da je (a_n) podniz od (b_n) i (b_n) podniz od (a_n). Jesu li nužno nizovi (a_n) i (b_n) jednaki?

RJEŠENJE. Ne. Tvrdnja vrijedi za nizove $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$, ali oni očito nisu jednaki. □

Na predavanju se pokaže i sljedeći teorem.

TEOREM 2.30. *Ako je niz (a_n) konvergentan s limesom L, tada je i svaki njegov podniz konvergentan i limes mu je jednak L.*

ZADATAK 2.31. Dokažite da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0.$$

To posebno znači da logaritam raste "neusporedivo" sporije od linearne funkcije.

RJEŠENJE. Zapišimo

$$\frac{\ln n}{n} = \ln(n^{\frac{1}{n}}).$$

Po zadatku 2.19 znamo da $n^{\frac{1}{n}} \to 1$ pa po teoremu 2.27 primijenjenom na funkciju $x \mapsto \ln x$ u točki $a = 1$ slijedi da navedeni izraz konvergira k $\ln 1 = 0$. □

ZADATAK 2.32. Dokažite da sljedeći limesi postoje i izračunajte ih:

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ (b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n$

RJEŠENJE. (a) Primijetimo da je izraz jednak:

$$\frac{1}{(\frac{n+1}{n})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

Korištenjem 2.16 i 2.26 slijedi da niz konvergira u $\frac{1}{e}$.

(b) Izraz je jednak:

$$\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^n = \left(\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{2n-1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Korištenjem 2.16 i 2.26 slijedi da niz konvergira u $e \cdot 1 = e$.

□

ZADATAK 2.33. Dokažite da sljedeći limesi postoje i izračunajte ih:

(a) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n} - n)$ (b) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[4]{n^4+n^3+n^2+n+1} - n)$

RJEŠENJE. (a) Vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n} - n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2},$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti koristili teorem 2.27 za $f(x) = \sqrt{x}$.

(b) Označimo $a_n = \sqrt[4]{n^4+n^3+n^2+n+1}$. Koristeći $a - b = \frac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$,

$$\sqrt[4]{n^4+n^3+n^2+n+1} - n = \frac{n^3+n^2+n+1}{a_n^3+na_n^2+n^2a_n+n^3}$$

Dijeljenjem brojnika i nazivnika sa n^3 te korištenjem teorema 2.27 za $f(x) = \sqrt[4]{x}$ slijedi

$$\frac{a_n}{n} = \sqrt[4]{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}} \to 1$$

pa je po teoremu 2.16 limes jednak $\frac{1}{4}$.

□

2.3. Limesi rekurzivno zadanih nizova

Na predavanju se dokaže sljedeći teorem.

TEOREM 2.34. *Ako je niz (a_n) rastuć (padajuć) i odozgo (odozdo) ograničen, tada je konvergentan i vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} a_n \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbf{N}} a_n\right)$$

ZADATAK 2.35. Niz (a_n) zadan je rekurzivno s:

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2}.$$

Ispitajte konvergenciju i odredite mu limes ako postoji.

RJEŠENJE. Dokazujemo induktivno sljedeću tvrdnju. Niz (a_n) je monotono rastuć i ograničen odozgo sa 1.

Tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Pretpostavimo da vrijedi za neki $n \in \mathbf{N}$ i dokažimo da vrijedi za $n + 1$. Koristeći dio tvrdnje o ograničenosti slijedi:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2} \leq \frac{1 + 1}{2} = 1.$$

Nadalje,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 + 1}{2} - a_n = \frac{(a_n - 1)^2}{2} \geq 0.$$

Dakle, tvrdnja vrijedi i za $n + 1$ i time je tvrdnja dokazana indukcijom.

Po teoremu 2.34 sada slijedi da je niz konvergentan. Označimo mu limes sa L. Ako niz (a_n) konvergira k L, tada i niz (a_{n+1}) konvergira ka L kao podniz konvergentnog niza. Nadalje, koristeći teorem 2.16 slijedi da niz $(\frac{a_n^2+1}{2})_n$ konvergira ka $\frac{L^2+1}{2}$. Međutim, po uvjetu zadatka su nizovi $(a_{n+1})_n$ i $(\frac{a_n^2+1}{2})_n$ jednaki pa im i limesi moraju biti jednaki, tj. mora vrijediti

$$L = \frac{L^2 + 1}{2}.$$

Posljednja jednakost je ekvivalentna s $L = 1$ pa zaključujemo da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

□

Napomena. U sljedećem zadatku koristit ćemo sljedeću tvrdnju. Za svaka dva broja $a, b \in [0, \infty)$ vrijedi

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Ona jednostavno slijedi iz sljedećeg identiteta

$$\frac{a + b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0.$$

Generalizacija navedene tvrdnje poznati je rezultat čiji dokaz ostavljamo u dodatku za zainteresirane čitatelje.

TEOREM 2.36 (A-G nejednakost). *Neka je $n \in \mathbf{N}$ i neka su $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ realni brojevi. Tada vrijedi*

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

ZADATAK 2.37. Niz (a_n) je zadan rekurzivno s

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right).$$

Dokažite da je niz konvergentan i odredite mu limes.

Rješenje. Kao u prethodnom zadatku zaključujemo da limes, ako postoji, mora zadovoljavati

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{3}{L}\right) \Leftrightarrow L^2 = 3.$$

Induktivno je očito da su svi članovi niza pozitivni brojevi pa limes ne može biti $L = -\sqrt{3}$. Dakle, jedina mogućnost je $L = \sqrt{3}$.

Dokažimo sada da limes postoji. Dokazat ćemo da je niz padajuć i ograničen odozdo.

Koristeći AG nejednakost na 2 člana, slijedi:

$$\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{3}{a_n}} = \sqrt{3}.$$

Dakle, niz je odozdo ograničen sa $\sqrt{3}$.

Dokažimo da je niz padajuć. Za $n \geq 1$ vrijedi

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) - a_n = \frac{3 - a_n^2}{2a_n} \leq 0,$$

gdje zadnja nejednakost vrijedi zbog toga što smo dokazali da je $a_n^2 \geq 3$. Sada po teoremu 2.34 slijedi da je niz konvergentan. Po prvom dijelu rješenja sada slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3}.$$

□

Zadatak 2.38. Ispitajte konvergenciju niza

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ korijena}}, \quad n \in \mathbf{N}$$

i odredite mu limes, ako postoji.

Rješenje. Niz je rekurzivno zadan s

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Limes, ako postoji, mora zadovoljavati $L = \sqrt{2 + L}$, odnosno $L = 2$.

Dokažimo da limes postoji. U tu svrhu dokažimo da je niz rastuć i ograničen odozgo.

Indukcijom dokazujemo da je $a_n \leq 2$. Tvrdnja vrijedi za $n = 1$, a korak indukcije slijedi iz činjenice da je $x \mapsto \sqrt{x}$ rastuća funkcija i:

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Tvrdnja da je niz rastuć slijedi iz

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2 + a_n} - a_n = \frac{2 + a_n - a_n^2}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} = \frac{(1 + a_n)(2 - a_n)}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} \geq 0.$$

Dakle, po teoremu 2.34 slijedi da je niz konvergentan pa po prvom dijelu rješenja slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

□

2.4. Gomilišta, limes superior i inferior

DEFINICIJA 2.39. Kažemo da je $a \in \overline{\mathbf{R}}$ **gomilište** niza (a_n) ako postoji podniz $(a_{p_n})_n$ niza $(a_n)_n$ takav da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} a_{p_n} = a.$$

ZADATAK 2.40. Odredite sva gomilišta niza $a_n = (-1)^n$.

RJEŠENJE. Primijetimo da je $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1$ i $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1$. Dakle, niz ima barem dva gomilišta: 1 i -1. Dokažimo da su to sva gomilišta.

Pretpostavimo da je L gomilište niza (a_n). To znači da postoji podniz a_{p_n} koji konvergira k L. Označimo li

$$A = \{2n : n \in \mathbf{N}\}, \quad B = \{2n-1 : n \in \mathbf{N}\},$$

zbog toga što je

$$\mathbf{N} = A \cup B,$$

to znači skup $\{p_n : n \in \mathbf{N}\}$ ima beskonačno elemenata presjeka sa A ili B. Naime, kad bi imao konačno sa oba, onda bi cijeli skup imao samo konačno elemenata, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je p_n strogo rastuća funkcija. Ako je presjek sa skupom A beskonačan, to znači da možemo odabrati podniz tog podniza (p_{q_n}) koji se cijeli nalazi u A. S jedne strane, tada niz $a_{p_{q_n}}$ konvergira u L jer je to podniz niza koji konvergira k L, ali s druge strane, kako je to podniz niza a_{2n}, tada on konvergira i u 1. Po jedinstvenosti limesa tada slijedi $L = 1$. Kad bi se beskonačno članova nalazilo u B, tada bismo dobili $L = -1$ pa zaključujemo da ne postoji ni jedno drugo gomilište izvan skupa $\{-1, 1\}$. □

DEFINICIJA 2.41. Neka je (a_n) niz i $A \subseteq \overline{\mathbf{R}}$ skup njegovih gomilišta. Supremum skupa A nazivamo **limes superior** i označavamo

$$\limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Infimum skupa A nazivamo **limes inferior** i označavamo

$$\liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Napomena. Kako svaki niz ima monoton podniz, taj podniz ima limes u $\overline{\mathbf{R}}$. Dakle, skup gomilišta je neprazan.

TEOREM 2.42. *Niz (a_n) je konvergentan ako i samo ako postoji realan broj L takav da*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = L = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

i tada je $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Zadatak 2.43. Izračunajte

(a) $\limsup_{n\to+\infty} \frac{1+n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n+1}$ (b) $\liminf_{n\to+\infty} \frac{(1+(-1)^n)^n+n\cos(n\pi)}{2n+1}$

Rješenje. (a) Skup $\mathbf{N}$ rastavimo na klase ostataka modulo 4, tj. zapišemo $\mathbf{N} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, gdje je $A_k = \{4j + k : j \in \mathbf{N}_0\}$ Primijetimo da je

$$a_{4j+1} = \frac{1 + (4j + 1)\cos(\frac{4j+1}{2}\pi)}{2(4j + 1) + 1} = \frac{1}{8j + 3} \to 0, \quad j \to \infty$$
$$a_{4j+2} = \frac{1 + (4j + 2)\cos(\frac{4j+2}{2}\pi)}{2(4j + 2) + 1} = -\frac{4j + 1}{8j + 5} \to -\frac{1}{2}, \quad j \to \infty$$
$$a_{4j+3} = \frac{1 + (4j + 3)\cos(\frac{4j+3}{2}\pi)}{2(4j + 3) + 1} = \frac{1}{8j + 7} \to 0, \quad j \to \infty$$
$$a_{4j+4} = \frac{1 + (4j + 4)\cos(\frac{4j+4}{2}\pi)}{2(4j + 4) + 1} = \frac{4j + 5}{8j + 9} \to \frac{1}{2}, \quad j \to \infty$$

Dakle, skup $\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$ je podskup skupa gomilišta. Kako rastav $\cup_{j=1}^4 A_j$ particionira $\mathbf{N}$, svaki podniz od a_n ima beskonačno elemenata u nekom od skupova A_j, $j = 1, 2, 3, 4$ pa bi podniz tog podniza morao konvergirati u neki element skupa $\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$. Kako podniz konvergentnog niza ima isti limes kao i niz, slijedi da su jedina moguća gomilišta $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$. Sada zaključujemo da je

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\} = -\frac{1}{2}, \quad \text{i} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \sup\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}.$$

□

Primjer 2.44. U sljedećem zadatku koristit ćemo "trik" koji je toliko čest u dokazima analizi da zaslužuje odvojeno mjesto. Slavni matematičar Terence Tao popularno ga naziva "create yourself an epsilon of room" trikom. Na hrvatskom još nema ustaljen naziv.

Trik je sljedeći. Želimo li dokazati jednakost izraza $A = B$, tada je često puno lakše dokazati sljedeću ekvivalentnu tvrdnju. Za svaki $\epsilon > 0$ vrijede ocjene

$$A \le B + \epsilon \quad \text{i} \quad B \le A + \epsilon.$$

Naime, ako je $A = B$, onda gornje ocjene očito vrijede za svaki $\epsilon > 0$. S druge strane, ako za svaki $\epsilon > 0$ vrijede gornje ocjene, kada bi vrijedilo i $A < B$, tada bismo odabirom $\epsilon := \frac{B-A}{2} > 0$ u drugoj ocjeni dobili

$$B \le A + \epsilon = A + \frac{B - A}{2} \Leftrightarrow B \le A,$$

što je kontradikcija sa $A < B$. U slučaju u slučaju $B < A$ dobili bismo kontradikciju sa prvim uvjetom odabirom $\epsilon = \frac{A-B}{2}$ i time je tvrdnja je dokazana.

Zadatak 2.45. Neka je (a_n) odozgo ograničen niz takav da za sve $n \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$a_{n+1} \ge a_n - \frac{1}{2^n}.$$

Dokažite da je niz (a_n) konvergentan.

RJEŠENJE. Neka je $L := \limsup_n a_n$ i $l = \liminf_n a_n$. Budući da je niz ograničen odozgo, slijedi $L < +\infty$. Po definiciji limesa superiora i inferiora vrijedi $l \leq L$. Pokazat ćemo da za proizvoljni $\epsilon > 0$ vrijedi $l > L - \epsilon$. Po komentaru prije zadatka, to će implicirati da je $l = L$, tj. da je niz konvergentan.

Na predavanju se pokaže da su L i l također gomilišta niza (a_n) pa postoje $(a_{p_n})_n$ i $(a_{q_n})_n$ takvi da $a_{p_n} \to L$ i $a_{q_n} \to l$ za $n \to \infty$.

Neka je sada $\epsilon > 0$ proizvoljan. Za $m \in \mathbf{N}$ proizvoljan vrijedi

$$\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{m+1}}}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Kako $2^{-n+1} \to 0$ za $n \to \infty$, postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da je $2^{-n+1} < \frac{\epsilon}{2}$ za sve $n \geq n_0$.

Budući da $a_{p_n} \to L$, postoji $n_1 \in \mathbf{N}$ takav da je $p_{n_1} > n_0$ i da je $a_{p_{n_1}} > L - \frac{\epsilon}{2}$. Međutim, Tada iz navedene ocjene slijedi da za svaki $n \geq p_{n_1}$ vrijedi:

$$a_n \geq a_{p_{n_1}} - \sum_{k=p_{n_1}}^{n} \frac{1}{2^k} \geq a_{p_{n_1}} - \frac{1}{2^{p_{n_1}-1}} > L - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} = L - \epsilon.$$

Dakle, zbog toga što postoji $n_2 \in \mathbf{N}$ takav da je $q_n > p_{n_1}$ za sve $n \geq n_2$, slijedi da za svaki $n \geq n_2$ vrijedi

$$a_{q_n} \geq L - \epsilon.$$

Prema tome, slijedi

$$l = \lim_{n\to\infty} a_{q_n} = \liminf_{n\to\infty} a_{q_n} \geq \liminf_{n\to\infty} (L - \epsilon) = L - \epsilon.$$

Dakle, $l \geq L - \epsilon$ i time je tvrdnja dokazana.

Napomena. Ne postoji previše posebnosti u odabiru $\frac{1}{2^n}$ u uvjetu zadatka. Tvrdnja se potpuno analogno dokaže za niz (a_n) koji zadovoljava

$$a_{n+1} \geq a_n - b_n,$$

gdje je b_n bilo koji niz nenegativnih brojeva za koji limes $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} b_n$ postoji i konačan je (tada kažemo da navedeni red konvergira). Jedan takav primjer je $b_n = \frac{1}{n^2}$, ali više o konvergenciji redova na matematičkoj analizi 2. □

2.5. Cesaro–Stolzov teorem i primjene

TEOREM 2.46. *Neka su (a_n) i (b_n) nizovi takvi da je b_n strogo rastući i neograničen. Ako postoji limes*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n},$$

tada je niz $(\frac{a_n}{b_n})$ konvergentan i vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

Napomena. Limes niza $(\frac{a_n}{b_n})$ može postojati i ako limes $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ ne postoji! Na primjer, za

$$a_n = (-1)^n, \quad b_n = n$$

vrijedi:

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \frac{1}{n} \to 0 \quad n \to \infty$$

pa zaključujemo da je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. S druge strane,

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \begin{cases} -2, & n = 2k \\ 2, & n = 2k+1 \end{cases}$$

pa vidimo da niz $(\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n})_n$ ne konvergira.

Zadatak 2.47. Dokažite da sljedeći nizovi imaju limes i izračunajte ga.

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Rješenje. (a) Označimo $a_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} \cdots + \sqrt[n]{n}$ i $b_n = n$. Niz b_n je strogo rastući i neograničen pa provjerimo postoji li limes

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{(n+1) - n} = \sqrt[n]{n} \to 1.$$

Dakle, uvjeti Cesaro–Stolzovog teorema su zadovoljeni pa slijedi da je i niz $(\frac{a_n}{b_n})$ konvergentan i limes mu je jednak 1.

(b) Primijetimo da je

$$\ln\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right) = \ln n - \frac{\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n}{n} = \frac{\ln\frac{n}{1} + \ln\frac{n}{2} + \cdots + \ln\frac{n}{n}}{n}$$

Označimo $a_n = \ln\frac{n}{1} + \ln\frac{n}{2} + \cdots + \ln\frac{n}{n}$ i $b_n = n$. Niz b_n je strogo rastuć i neograničen pa promotrimo:

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\left(\ln\frac{n+1}{1} + \ln\frac{n+1}{2} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n+1}\right) - \left(\ln\frac{n}{1} + \ln\frac{n}{2} + \cdots + \ln\frac{n}{n}\right)}{n+1-n} = n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 1.$$

Po Cesaro–Stolzovom teoremu slijedi:

$$\ln\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right) = \frac{a_n}{b_n} \to 1.$$

Konačno, koristeći teorem 2.27 za funkciju $x \mapsto e^x$ slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)} = e^1 = e.$$

□

Napomena. Može se pokazati, ali to je vrlo netrivijalan rezultat koji izlazi izvan gradiva matematičke analize 1, da vrijedi sljedeći rezultat.

Teorem 2.48 (Stirlingova formula).

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

što je skraćeni zapis za

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

ZADATAK 2.49. Neka je $a_1 = 1$ i

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \quad n \geq 1.$$

(a) Dokažite da $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
(b) Odredite $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$.

RJEŠENJE. Indukcijom lako slijedi da su svi članovi niza (a_n) pozitivni.

(a) Niz (a_n) je očito rastuć pa kad bi bio ograničen, imao bi limes $L \in \mathbf{R}$, za koji vrijedi $L = L + \frac{1}{L}$. To je očito nemoguće niti za jedan $L \in \mathbf{R}$ pa zaključujemo da nije ograničen pa kako je rastuć, slijedi da je $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.
(b) Ideja je primijeniti Cesaro–Stolzov teorem na niz $\frac{a_n^2}{n}$. Primijetimo da je

$$\frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{n+1-n} = (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = \frac{a_n + a_{n+1}}{a_n} = 2 + \frac{1}{a_n^2} \to 2, \quad n \to \infty.$$

Po Cesaro–Stolzovom teoremu zaključujemo da je i niz $\frac{a_n^2}{n}$ konvergentan i da vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{n} = 2.$$

Sada po teoremu 2.27 slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{n}} = \sqrt{2}.$$

Napomena. Prirodno se nameće pitanje kako se može naslutiti da niz a_n raste kao $\sqrt{2n}$ bez da je to zadano u zadatku. Trenutno još nemamo sve alate za to naslutiti, ali potičemo studente da se vrate na odlomak kad nauče derivacije na Matematičkoj analizi 2.

Shvatimo li izraz

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{(n+1) - n}$$

kao "diskretnu derivaciju", to znači da kad bi a bila funkcija $a : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, približno bi vrijedilo:

$$a'(n) \approx \frac{1}{a(n)}.$$

Funkcija $y = y(x)$ koja zadovoljava $y'(x) = \frac{1}{y(x)}$ može se dobiti na sljedeći način. Izraz je ekvivalentan s: $(y^2(x))' = 2$ pa je $y^2(x) = 2x + C$ za neki $C \in \mathbf{R}$. Dakle $y(x) = \sqrt{2x + C}$. Dakle, očekujemo da je $a(n) \approx \sqrt{2n + C}$, što je asipmtotski ekvivalentno s $a(n) \approx \sqrt{2n}$.

□

2.6. Razni zadaci

ZADATAK 2.50 (Kolokvij 2016.). Neka je (a_n) ograničen niz takav da je

$$\lim_{n\to\infty} (a_{2^n} - 3a_n) = 0.$$

Dokažite da je niz konvergentan i odredite mu limes.

Rješenje. Kako je (a_n) ograničen, to mu je skup gomilišta ograničen. Neka je $L \in \mathbf{R}$ jedno gomilište tog niza. Tada postoji podniz (a_{p_n}) takav da $a_{p_n} \to L$. Kako je $(a_{2^{p_n}} - 3a_{p_n})_n$ podniz niza $(a_{2^n} - 3a_n)_n$, koristeći uvjet zadatka slijedi $a_{2^{p_n}} - 3a_{p_n} \to 0$. Dakle, imamo

$$\lim_{n\to\infty} a_{2^{p_n}} = \lim_{n\to\infty}(a_{2^{p_n}} - 3a_{p_n} + 3a_{p_n}) = \lim_{n\to\infty}(a_{2^{p_n}} - 3a_{p_n}) + \lim_{n\to\infty} 3a_{p_n} = 3L$$

pa zaključujemo da je i $3L$ također gomilište. Induktivno zaključujemo da za svaki $k \in \mathbf{N}$ vrijedi da je $3^k L$ gomilište. Prema tome, kad bi postojalo gomilište $L \neq 0$, zbog toga što tada $|3^k L| \to \infty$ za $k \to \infty$, dobili bismo kontradikciju sa ograničenošću skupa gomilišta. Dakle, $L = 0$ je jedino gomilište, a to po teoremu s predavanja znači da je niz konvergentan.

Alternativno rješenje. Neka je $f(n) = 2^n$. Sa $f^{(k)}$ označimo k-tu iteraciju funkcije f, odnosno

$$f^{(k)}(n) = \underbrace{f(\ldots f}_{k \text{ puta}}(n)\ldots).$$

Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Po uvjetu zadatka možemo odabrati $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $|a_{f(n)} - 3a_n| < \epsilon$, odnosno

$$\left| a_n - \frac{a_{f(n)}}{3} \right| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.1}$$

Neka je sada $n \geq n_0$ proizvoljan. Tada zbog toga što je $f^{(j)}(n) \geq n \geq n_0$, uvrštavanjem $f^{(j)}(n)$ umjesto n u (2.1) te dijeljenjem s 3^j za $j = 0, 1, \ldots, k-1$ (gdje je $k \in \mathbf{N}$ koji ćemo odabrati uskoro) slijedi:

$$\begin{aligned} \left| a_n - \frac{a_{f(n)}}{3} \right| &< \frac{\epsilon}{3}, \\ \left| \frac{a_{f(n)}}{3} - \frac{a_{f^{(2)}(n)}}{3^2} \right| &< \frac{\epsilon}{3^2}, \\ &\vdots \\ \left| \frac{a_{f^{(k-1)}(n)}}{3^{k-1}} - \frac{a_{f^{(k)}(n)}}{3^k} \right| &< \frac{\epsilon}{3^k}. \end{aligned}$$

Zbrajanjem gornjih nejednakosti i primjenom nejednakosti trokuta slijedi:

$$\left| a_n - \frac{a_{f^{(k)}(n)}}{3^k} \right| < \frac{\epsilon}{3} + \cdots + \frac{\epsilon}{3^k} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Kako je niz omeđen, postoji $M > 0$ takav da je $|a_m| \leq M$ za sve $m \in \mathbf{N}$. Odaberemo li k dovoljno velik tako da je $\frac{M}{3^k} < \frac{\epsilon}{2}$, iz posljednje nejednakosti i nejednakosti trokuta slijedi:

$$|a_n| \leq \left| a_n - \frac{a_{f^{(k)}(n)}}{3^k} \right| + \left| \frac{a_{f^{(k)}(n)}}{3^k} \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dakle, $a_n \to 0$ po definiciji. □

Zadatak 2.51 (Kolokvij 2020.). Dokažite da sljedeći limes postoji i izračunajte ga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + \sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \cdots + \sqrt[\lfloor\sqrt{n}\rfloor]{n}}{n}.$$

Rješenje. Kroz čitavo rješenje pretpostavljamo da je n dovoljno velik, što naravno smijemo jer to ne utječe na limes. Ako je $a > 1$, tada je $x \mapsto a^x$ rastuća funkcija pa za $k \geq 3$ vrijedi:

$$\sqrt[k]{n} = n^{1/k} \leq n^{1/3} = \sqrt[3]{n}.$$

Prema tome, vrijedi

$$1 \le \frac{n + \sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \cdots + \sqrt[\lfloor\sqrt{n}\rfloor]{n}}{n} \le \frac{n + \sqrt{n} + (\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 2)\sqrt[3]{n}}{n} \le \frac{n + \sqrt{n} + \sqrt{n}\cdot\sqrt[3]{n}}{n}.$$

Kako je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + \sqrt{n} + \sqrt{n}\cdot\sqrt[3]{n}}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^{1/6}}\right) = 1,$$

po teoremu o sendviču slijedi da je traženi limes jednak 1.

Napomena. Može se pokazati da ovaj zadatak nije moguće riješiti koristeći primjenom Cesaro–Stolzovog teorema na brojnik i nazivnik budući da dobiveni niz kvocijenta razlika ne konvergira. Skica dokaza te tvrdnje u nastavku puno je kompliciranija od samog rješenja zadatka i može se preskočiti. Označimo li $a_n = n + \sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \cdots + \sqrt[\lfloor\sqrt{n}\rfloor]{n}$ i $b_n = n$, tada je

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} &= \left(\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor} \sqrt[k]{n+1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \sqrt[k]{n}\right) \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\left(\sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n}\right) + \sum_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor < k \le \lfloor\sqrt{n+1}\rfloor} \sqrt[k]{n+1} = (*)\end{aligned}$$

Proučimo najprije:

$$s_n := \sum_{k=2}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\left(\sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n}\right)$$

u posljednjem retku. Koristeći formulu za razliku k-tih potencija ($k \ge 2$) te trivijalne ocjene $n < n+1$ i $\frac{k-1}{k} \ge \frac{1}{2}$ slijedi:

$$0 \le \sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n} = \frac{(n+1) - n}{\sum_{j=0}^{k-1} n^{\frac{j}{k}}(n+1)^{\frac{k-1-j}{k}}} < \frac{1}{kn^{\frac{k-1}{k}}} \le \frac{1}{kn^{\frac{1}{2}}}.$$

Odatle slijedi:

$$0 \le s_n \le \sum_{k=2}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \frac{1}{kn^{\frac{1}{2}}} \le \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Koristeći Cesaro–Stolzov teorem (ili zadatak 2.68) slijedi da posljednji izraz konvergira k 0 pa po teoremu o sendviču slijedi $s_n \to 0$.

Promotrimo sada posljednji član u izrazu $(*)$. Primijetimo najprije da je

$$c_n := \sum_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor < k \le \lfloor\sqrt{n+1}\rfloor} \sqrt[k]{n+1} = \begin{cases} \sqrt[\sqrt{n+1}]{n+1}, & n+1 \text{ je potpun kvadrat} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Koristeći zadatak 2.19 slijedi

$$c_{m^2-1} = \sqrt[m]{m^2} = (\sqrt[m]{m})^2 \to 1,$$

Odatle slijedi (dokaz za vježbu)

$$\liminf c_n = 0 < 1 = \limsup_{n\to\infty} c_n.$$

Konačno, zaključujemo (dokaz za vježbu) da vrijedi

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = 1 < 2 = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

pa traženi niz ne konvergira. □

Zadatak 2.52 (Kolokvij 2020.). Neka je (a_n) niz pozitivnih realnih brojeva koji je neograničen i za koji vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}-a_n) = 0.$$

Za $n \in \mathbb{N}$ sa $f(n)$ označimo najmanji broj koji je veći od n, takav da je $a_{f(n)} - a_n > 1$. Dokažite da je

$$\lim_{n\to\infty} (a_{f(n)} - a_n) = 1.$$

Rješenje. Iz prvog uvjeta znamo da je $f(n)$ dobro definirano. Naime, kako je niz neograničen, za proizvoljan n postoji $m > n$ takav da je $a_m > a_n + 1$ pa onda postoji i najmanji takav koji je veći od n i njega označavamo sa $f(n)$.

Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan i $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|a_{n+1} - a_n| < \epsilon$. Po definiciji funkcije f znamo da je $a_{f(n)} - a_n > 1$. S druge strane, zbog toga što je $f(n)$ najmanji indeks takav da je $a_{f(n)} - a_n > 1$, vrijedi $a_{f(n)-1} - a_n \leq 1$ pa za $n \geq n_0$, zbog toga što je $f(n) - 1 \geq n \geq n_0$, vrijedi

$$a_{f(n)} - a_n = (a_{f(n)-1} - a_n) + (a_{f(n)} - a_{f(n)-1}) < 1 + \epsilon.$$

Dakle, zaključujemo da za $n \geq n_0$ vrijedi

$$1 < a_{f(n)} - a_n < 1 + \epsilon$$

Kako je $\epsilon > 0$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $\lim_{n\to\infty}(a_{f(n)} - a_n) = 1$. □

Zadatak 2.53 (Kolokvij 2023.). Neka je (x_n) ograničen niz, takav da za sve $n \geq 2$ vrijedi

$$x_n \leq \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2}.$$

Dokažite da je niz (x_n) konvergentan.

Rješenje. Dokazat ćemo da je niz padajuć. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $m \in \mathbf{N}$ takav da je $x_m < x_{m+1}$. Označimo $\delta := x_{m+1} - x_m > 0$. Uvjet je ekvivalentan s $x_{n+1} - x_n \geq x_n - x_{n-1}$. Odatle i iz pretpostavke teleskopiranjem slijedi:

$$x_{m+n} - x_m = \sum_{k=1}^{n} (x_{m+k} - x_{m+k-1}) \geq n\delta.$$

Puštanjem $n \to \infty$ slijedi da niz nije ograničen, što je kontradikcija sa pretpostavkom. Dakle, niz je padajuć i ograničen pa ima limes. □

Napomena. Pod pretpostavkom da postoji $m \in \mathbf{N}$ takav da $x_m < x_{m+1}$, rješenje možemo dovršiti i bez ulaženja u kontradikciju. Naime, budući da je niz $(x_{n+1} - x_n)_n$ rastuć te je $x_{m+1} - x_m > 0$, slijedi da je $x_{n+1} - x_n > 0$ za sve $n > m$, odnosno niz $(x_{n+m})_n$ rastuć je. Kako je on ograničen odozgo, mora biti konvergentan, odakle slijedi da je polazni niz $(x_n)_n$

konvergentan. Mogli bismo reći da je gornje rješenje bolje utoliko što nam daje jaču informaciju o ponašanju niza (x_n), a to je da slučaj kada ovakav m postoji zapravo nije ni moguć.

ZADATAK 2.54 (*). Neka su $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ nizovi. Ako je $(a_n)_n$ podniz od $(b_n)_n$ i $(b_n)_n$ podniz od $(a_n)_n$ i ako pretpostavimo da $(a_n)_n$ konvergira, vrijedi li $a_n = b_n$ za sve $n \in \mathbf{N}$?

RJEŠENJE. Dokažimo da tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja nije istinita i odaberimo $m \in \mathbf{N}$ za koji je $a_m \neq b_m$. Neka je $L := \lim_{n\to\infty} a_n$. Posebno, kako je (b_n) podniz od (a_n), slijedi $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Kako je (b_n) podniz od (a_n), postoji strogo rastuća funkcija $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takva da je $b_n = a_{f(n)}$ za sve $n \in \mathbf{N}$. Nadalje, kako je (a_n) podniz od (b_n), postoji strogo rastuća funkcija $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takva da je $a_n = b_{g(n)}$ za sve $n \in \mathbf{N}$. Dakle, za sve $n \in \mathbf{N}$ imamo $a_n = a_{f(g(n))}$. Iteriranjem ove jednakosti sada slijedi da za proizvoljan $n \in \mathbf{N}$ imamo $a_n = a_{(f\circ g)^{(k)}(n)}$ za sve $k \in \mathbf{N}$.

Kako su f i g strogo rastuće, indukcijom lako slijedi da za sve $n \in \mathbf{N}$ imamo $f(n) \geq n$ i $g(n) \geq n$. Budući da $a_m \neq b_m$, mora biti $g(m) \neq m$ pa nužno $g(m) > m$. Uočimo da je $f \circ g$, kao kompozicija strogo rastućih funkcija, i sama strogo rastuća. Kako je

$$(f \circ g)(m) = f(g(m)) \geq g(m) > m,$$

indukcijom po k dobivamo da $(f \circ g)^{(k+1)}(m) > (f \circ g)^{(k)}(m)$ za sve $k \in \mathbf{N}$, odnosno niz $((f \circ g)^{(k)}(m))_k$ strogo je rastuć. Dakle, $(a_{(f\circ g)^{(k)}(m)})_k$ je podniz niza $(a_n)_n$ pa je konvergentan s limesom L. No, s druge strane znamo da je on konstantno jednak a_m pa slijedi $a_m = L$. Međutim, potpuno analognim zaključivanjem dobivamo $b_m = L$, što je kontradikcija. $\square$

ZADATAK 2.55 (*). Dokažite da vrijede sljedeći identiteti:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbf{N}} \sup_{m\geq n} a_m = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} a_m \quad \text{i} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} \inf_{m\geq n} a_m = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\geq n} a_m.$$

RJEŠENJE. Dokažimo prvi identitet, drugi ostavljamo za vježbu.

Neka je A skup gomilišta niza (a_n). Nadalje, označimo $A_n = \{a_m : m \in \mathbf{N}, m \geq n\}$. Očito je $A_{n+1} \subseteq A_n$ pa je niz $b_n := \sup A_n$ padajuć.

Iz definicije niza (b_n) vidimo da za sve $m \geq n$ vrijedi $b_n \geq a_m$. Prema tome, ako je $a \in A$, zbog toga što $a_{p_n} \to a$, vrijedi da je $a \leq b_n$. Dakle, za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi da je b_n gornja međa skupa A pa za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi $\sup A \leq b_n$. To posebno znači da je $\sup A$ donja međa niza b_n pa vrijedi

$$\sup A \leq \inf_{n\in\mathbf{N}} b_n.$$

Preostaje dokazati da je $\inf b_n \leq \sup A$. U tu svrhu je dovoljno dokazati da za proizvoljan $\epsilon > 0$ vrijedi

$$\inf_n b_n < \sup A + \epsilon.$$

Kad bi postojalo beskonačno članova niza (a_n) za koje je $a_n > \sup A + \epsilon$, tada bi taj niz imao konvergentan podniz sa limesom u $[\sup A + \epsilon, \infty]$ pa bi postojalo gomilište $a' \in A$ za koje je $a' \geq \sup A + \epsilon$, što je kontradikcija sa definicijom supremuma skupa A. Dakle, postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $a_n \leq \sup A + \epsilon$. Međutim, to znači da je $b_{n_0} \leq \sup A + \epsilon$.

Konačno, kako je niz b_n padajuć, to znači i da je

$$\inf b_n \leq \sup A + \epsilon.$$

Kako je $\epsilon > 0$ proizvoljan, slijedi

$$\inf_{n\in\mathbf{N}} b_n \leq \sup A.$$

Kako smo obratnu nejednakost već dokazali, slijedi tvrdnja zadatka. □

2.7. Zadaci za vježbu

ZADATAK 2.56. Dokažite da sljedeći limesi postoje i izračunajte ih.

(a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n(2n^3+1)+3^n n(n^2+1)}{3^n(2n^3+1)}$ (b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{100^n+n^{100}}{n!+3^n}$

ZADATAK 2.57. Dokažite da sljedeći limesi postoje i izračunajte ih.

(a) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[4]{n^4+n^2+1}$

(b) $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}} - \sqrt{n}\right)$

ZADATAK 2.58. Dokažite da sljedeći limesi postoje i izračunajte ih.

(a) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}+\frac{4}{n^4}}$

(b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor n\sqrt{2}\rfloor}{\lfloor n\sqrt{3}\rfloor}$

(c) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3+\cos n}$

(d) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2+3n+n4^{n+1}}$

ZADATAK 2.59. Dokažite da limes postoji i izračunajte ga:

$$\lim_{n\to\infty} \cos(2\pi\sqrt{n^2+n+1}).$$

ZADATAK 2.60. Neka je

$$a_n = \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}} + (a+1)\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Odredite $a \in \mathbf{R}$ tako da niz bude konvergentan.

ZADATAK 2.61. Izračunajte $\liminf a_n$ i $\limsup a_n$ za nizove:

(a) $a_n = \cos^n(n\pi)$ (b) $a_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$ (c) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$

Koji nizovi su konvergentni?

ZADATAK 2.62. Za navedene rekurzivno zadane nizove dokažite da su konvergentni i odredite im limes

(a)

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2+4}{5},\ n \geq 1$$

(b)

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n+2},\ n \geq 1$$

(c)

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{9-2a_n}{7-2a_n},\ n \geq 1$$

(d)

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \sin(a_n),\ n \geq 1$$

ZADATAK 2.63. Dokažite da sljedeći limesi postoje i izračunajte ih

(a) $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{5+\sqrt{5+\cdots+\sqrt{5}}}}_{n \text{ korijena}}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{3\cdot\sqrt{3\cdots\sqrt{3}}}}_{n \text{ korijena}}$

ZADATAK 2.64. Neka je a_n Fibonaccijev niz, tj. niz određen s

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

Dokažite da limes $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ postoji i izračunajte ga.

ZADATAK 2.65. Dokažite da sljedeći limesi postoje i izračunajte ih:

(a)

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right).$$

(b)

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} \right)$$

ZADATAK 2.66. Dokažite da za svaki $p > 1$ vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

ZADATAK 2.67. Dokažite da je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \cdots \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = e.$$

ZADATAK 2.68. Dokažite da niz (a_n) zadan s:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

konvergira. Njegov limes obično se označava sa γ, naziva se Euler–Mascheronijeva konstanta i približno je jednak $\gamma \approx 0.5772$.

ZADATAK 2.69. Neka je (a_n) niz realnih brojeva te L realan broj sa sljedećim svojstvom. Za svaki podniz niza (a_n), postoji podniz tog podniza koji konvergira u L. Dokažite da tada i niz (a_n) konvergira u L.

ZADATAK 2.70. Dokažite da za proizvoljne nizove (a_n) i (b_n) vrijede sljedeće nejednakosti:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

i

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \le \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n)$$

te pokažite da obratne nejednakosti općenito ne vrijede.

Zadatak 2.71 (*). Neka je (a_n) niz rekurzivno zadan s

$$a_1 \in (0,1), \quad a_{n+1} = a_n - a_n^2.$$

Dokažite da $\lim_{n\to\infty} na_n$ postoji i odredite ga.

Zadatak 2.72 (*). Neka je (a_n) niz realnih brojeva takav da za sve $m, n \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$a_{m+n} \le a_m + a_n.$$

Dokažite da $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ postoji i da je jednak je $\inf\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbf{N}\}$.

Zadatak 2.73 (*). Neka je (a_n) niz pozitivnih brojeva. Dokažite da je

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n}\right)^n \ge e$$

i da tvrdnja ne vrijedi niti za jedan broj veći od e.

2.8. Dodatak: Dokaz A-G nejednakosti

Dokaz teorema 2.36. Dokaz provodimo koristeći sljedeće dvije tvrdnje.

(i) Dokazujemo da tvrdnja vrijedi za $n \in \mathbf{N}$ oblika $n = 2^k$, $k \in \mathbf{N}$ indukcijom po k.
(ii) Dokažemo da istinitost tvrdnje za n povlači istinitost tvrdnje za $n-1$.

Pokažimo sada indukcijom da prethodne dvije tvrdnje povlače istinitost tvrdnje za proizvoljan n. Pokažimo najprije kako iz prethodne dvije tvrdnje slijedi tvrdnja za $n = 6$:

$$2 \xrightarrow{\text{(i)}} 4 \xrightarrow{\text{(i)}} 8 \xrightarrow{\text{(ii)}} 7 \xrightarrow{\text{(ii)}} 6.$$

Neka je sada $n \ge 2$ proizvoljan. Već smo ranije pokazali da je niz (2^k) neomeđen pa postoji $k \in \mathbf{N}$ takav da je $2^k \ge n$ i neka je k_0 najmanji takav. Ako je $n = 2^{k_0}$, tvrdnja slijedi iz prve tvrdnje, U suprotnom, primjenom druge tvrdnje $2^{k_0} - n$ puta slijedi da tvrdnja vrijedi za $n = 2^{k_0} - (2^{k_0} - n)$.

Dokažimo sada prethodno navedene tvrdnje

(i) Neka je $k = 1$. Tvrdnja za $n = 2$ slijedi iz

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \ge \sqrt{a_1 a_2} \Leftrightarrow (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \ge 0.$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbf{N}$. Dokažimo da tada vrijedi tvrdnja za $k+1$:

$$\begin{aligned}
\frac{a_1+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1+\cdots+a_{2^k}}{2^k}+\frac{a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)\\
&\geq \frac{1}{2}\left(\sqrt[2^k]{a_1\cdots a_{2^k}}+\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}\right)\\
&\geq \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1\cdots a_{2^k}}\cdot\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}}\\
&= \sqrt[2^{k+1}]{a_1\cdots a_{2^{k+1}}}
\end{aligned}$$

i time je tvrdnja nejednakosti dokazana, a dio tvrdnje o jednakosti slijedi iz jednakosti u bazi i koraku indukcije.

(ii) Dokažimo drugu tvrdnju. Neka su $a_1,\ldots,a_{n-1}\geq 0$ proizvoljni i pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za proizvoljne realne brojeve $b_1,\ldots b_n\geq 0$. Definiramo li $b_j=a_j$ za $j=1,\ldots,n-1$ i $b_n:=\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$, tada iz AG nejednakosti za n članova vrijedi

$$\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}+\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}}{n}=\frac{b_1+\cdots+b_n}{n}\geq\sqrt[n]{b_1\cdots b_n}=\sqrt[n]{a_1\cdots a_{n-1}\cdot\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}}.$$

Međutim, posljednja nejednakost nakon sređivanja ekvivalentna je s:

$$\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\geq\sqrt[n]{a_1\cdots a_{n-1}\cdot\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}}$$

Potenciranjem obje strane na n-tu potenciju, dijeljenjem obje strane sa $\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$ i zatim uzimanjem $n-1$-vog korijena od obje strane slijedi:

$$\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\geq\sqrt[n-1]{a_1\cdots a_{n-1}},$$

što je i trebalo dokazati.

Tvrdnja o jednakosti opet slijedi iz tvrdnje za jednakost u slučaju n brojeva.

$\square$