MATEMATIČKA ANALIZA 1

Pismeni ispit – 26. kolovoza 2024.

Zadatak 1. Dana je funkcija

$$g(x) = \operatorname{tg}(2 + 2x - x^2).$$

(a) (5 bodova) Odredite $g([0,2])$.

(b) (10 bodova) Neka je I najveći interval u $\mathbb{R}$ koji sadrži 0 i na kojem je g injekcija. Odredite I i $g(I)$.

(c) (10 bodova) Neka je $f : I \to g(I)$ dana pravilom $f(x) = g(x)$, $x \in I$. Odredite f^{-1}.

Rješenje.

a) Označimo $h(x) = 2 + 2x - x^2$. Tjeme od h je u $x_T = 1$ i ona strogo raste do 1 te strogo pada od 1.

$$\begin{aligned} g([0,2]) &= g([0,1] \cup [1,2]) = g([0,1]) \cup g([1,2]) \\ &= [g(0), g(1)] \cup [g(2), g(1)] = [\operatorname{tg}(2), \operatorname{tg}(3)] \cup [\operatorname{tg}(2), \operatorname{tg}(3)] \\ &= [\operatorname{tg}(2), \operatorname{tg}(3)] \end{aligned}$$

b) Da bi kompozicija bila injekcija, nužno je injekcija funkcija koja prva djeluje. Najveći interval na kojem je h injekcija a sadrži 0 je $\langle -\infty, 1]$. Dakle $0 \in I \subseteq \langle -\infty, 1]$. Označimo $J = h(I)$. Imamo

$$2 = h(0) \in J = h(I) \subseteq h(\langle -\infty, 1]) = \langle -\infty, 3], \qquad \text{odnosno}$$

$$2 \in J \subseteq \langle -\infty, 3]$$

Također funkcija tg mora biti definirana na J. Najveći interval J s ova dva svojstva je $J = \langle \frac{\pi}{2}, 3]$. Kako je $J = h(I)$ i $I \subseteq \langle -\infty, 1]$, te $y = h(x) \implies x = 1 \pm \sqrt{3 - y}$, imamo

$$\begin{aligned} &I = h^{-1}(J) \cap \langle -\infty, 1] = \left\langle \min\left(h^{-1}(\{\frac{\pi}{2}\})\right), h^{-1}(3)\right] = \left\langle 1 - \sqrt{3 - \frac{\pi}{2}}, 1\right], \\ &J = \langle \frac{\pi}{2}, 3], \\ &g(I) = \operatorname{tg}(h(I)) = \operatorname{tg}(J) = \langle -\infty, \operatorname{tg} 3]. \end{aligned}$$

c) U sljedećim oznakama smatramo da restrikcijama smanjujemo kodomenu na sliku. Neka su $x \in I$, $y, z \in J$ te $w \in g(I)$. Uočimo

$$\begin{aligned} y = h(x) &\implies x = (h|_I)^{-1}(y) = 1 - \sqrt{3 - y}, \\ w = \operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(z - \pi) \overset{z - \pi \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}{\implies} \operatorname{arctg} w = z - \pi &\implies z = (\operatorname{tg}|_J)^{-1}(w) = \pi + \operatorname{arctg} w. \end{aligned}$$

Sada, za $y = z$ imamo

$$f(x) = (\operatorname{tg}|_J \circ h|_I)(x) = w \implies x = f^{-1}(w) = (h|_I^{-1} \circ \operatorname{tg}|_J^{-1})(w) = 1 - \sqrt{3 - (\pi + \operatorname{arctg} w)}.$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Pismeni ispit – 26. kolovoza 2024.

Zadatak 2.

(a) (18 bodova) Izračunajte limes:

$$\lim_n n^{\frac{-5}{2}}(1^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{3}{2}} + \ldots + n^{\frac{3}{2}})$$

(b) (6 bodova) Neka je (a_n) niz u $\mathbb{R}$. Koristeći definiciju konvergencije niza dokažite: ako je L_1 limes niza (a_n) i L_2 limes istog niza (a_n), tada je $L_1 = L_2$.

Rješenje. a) Koristeći Stolzov teorem i oznaku q_3 za polinom stupnja 3 imamo

$$\begin{aligned}
\lim_n n^{\frac{-5}{2}}(1^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{3}{2}} + \ldots + n^{\frac{3}{2}}) &= \lim_n \frac{1^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{3}{2}} + \ldots + n^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{5}{2}}} = \lim_n \frac{(n+1)^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{5}{2}} - n^{\frac{5}{2}}} \\
&= \lim_n \frac{(n+1)^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{5}{2}} - n^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{(n+1)^{\frac{5}{2}} + n^{\frac{5}{2}}}{(n+1)^{\frac{5}{2}} + n^{\frac{5}{2}}} \\
&= \lim_n \frac{(n+1)^{\frac{3}{2}}[(n+1)^{\frac{5}{2}} + n^{\frac{5}{2}}]}{(n+1)^5 - n^5} \\
&= \lim_n \frac{n^{\frac{3}{2}} n^{\frac{5}{2}}(1+\frac{1}{n})^{\frac{3}{2}}[(1+\frac{1}{n})^{\frac{5}{2}} + 1]}{5n^4 + q_3(n)} \\
&= \lim_n \frac{(1+\frac{1}{n})^{\frac{3}{2}}[(1+\frac{1}{n})^{\frac{5}{2}} + 1]}{5 + \frac{q_3(n)}{n^4}} \\
&= \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

b) Pretpostavimo suprotno, odnosno $L_1 \neq L_2$. Možemo uzeti da je $L_1 < L_2$, inače zamijenimo oznake L_1 i L_2. Imamo $(L_2 - L_1)/2 > 0$ pa postoje $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takvi da

$$\begin{aligned}
n \geq n_1 &\implies |a_n - L_1| < \frac{L_2 - L_1}{2} \\
n \geq n_2 &\implies |a_n - L_2| < \frac{L_2 - L_1}{2}.
\end{aligned}$$

Za $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
a_n - L_1 \leq |a_n - L_1| < \frac{L_2 - L_1}{2} &\implies a_n < \frac{L_2 + L_1}{2} \\
-(a_n - L_2) \leq |a_n - L_2| < \frac{L_2 - L_1}{2} &\implies a_n > \frac{L_2 + L_1}{2}.
\end{aligned}$$

Dobili smo kontradikciju s pretpostavkom $L_1 \neq L_2$. Dakle $L_1 = L_2$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Pismeni ispit – 26. kolovoza 2024.

Zadatak 3.

(a) (15 bodova) Odredite infimum i supremum skupa:

$$A = \left\{ \frac{m^2 - n}{m^2 + n^2} : n, m \in \mathbb{N}, m > n \right\}.$$

(b) (10 bodova) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija i neka vrijedi $a < b$. Dokažite:

$$\sup_{x \in (a,b)} f(x) - \inf_{y \in (a,b)} f(y) = \sup_{x,y \in (a,b)} |f(x) - f(y)|.$$

Rješenje.

(a) Odredimo prvo supremum. Možemo uzeti $m = n^2$ te promatrati izraz:

$$f\left(n^2, n\right) = \frac{n^4 - n}{n^4 + n^2}.$$

Kad $n \to \infty$, dobijemo:

$$\lim_{n \to \infty} f\left(n^2, n\right) = 1.$$

Budući da je $f(m, n) < 1$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$ takve da $m > n$, zaključujemo da je supremum skupa A jednak 1. Promotrimo sada infimuma skupa A. Primijetimo da za $m = n + 1$, izraz postaje:

$$f(n+1, n) = \frac{(n+1)^2 - n}{(n+1)^2 + n^2} = \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 2n + 1}.$$

Kada $n \to \infty$, dobijemo:

$$\lim_{n \to \infty} f(n+1, n) = \frac{1}{2}.$$

Također, primjećujemo da je $f(m, n) > 1/2$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$ gdje $m > n$. Naime, uočimo da vrijedi:

$$\frac{m^2 - n}{m^2 + n^2} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(m^2 - n) > m^2 + n^2 \Leftrightarrow m^2 > n(n+1)$$

što uvijek vrijedi upravo jer $m > n$. Stoga zaključujemo da je infimum skupa A jednak $1/2$.

(b) Neka je $\varepsilon > 0$. Tada možemo pronaći $x_0, y_0 \in (a, b)$, takve da vrijedi $\sup_{x \in (a,b)} f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ i $\inf_{y \in (a,b)} > f(y_0) - \varepsilon$. Imamo

$$\sup_{x \in (a,b)} f(x) - \inf_{y \in (a,b)} f(x) < f(x_0) - f(y_0) + 2\varepsilon \leq \sup_{x,y \in (a,b)} |f(x) - f(y)| + 2\varepsilon.$$

S druge strane, možemo pronaći $x_1, y_1 \in (a, b)$ za koje vrijedi $\sup_{x,y \in (a,b)} |f(x) - f(y)| < |f(x_1) - f(y_1)| + \varepsilon$. Pretpostavimo bez smanjenja općenitosti da je $f(x_1) \geq f(y_1)$. Tada

$$\sup_{x,y \in (a,b)} |f(x) - f(y)| < |f(x_1) - f(y_1)| + \varepsilon \leq \sup_{x \in (a,b)} f(x) - \inf_{y \in (a,b)} f(y) + \varepsilon.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, slijedi tvrdnja.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Pismeni ispit – 26. kolovoza 2024.

Zadatak 4.

(a) (8 bodova) Neka je $f : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je $\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$. Dokažite da je $\lim_{x\to 0+} e^{f(x)} = 0$.

(b) (18 bodova) Odredite sve $a \in [0,\infty)$ za koje postoji limes i izračunajte ga

$$\lim_{x\to 0+} x^a \sin\frac{1}{x}$$

Rješenje.

(a) Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Sa predavanja znamo da je $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$, što znači da postoji $M > 0$ takav da za sve $x < M$ vrijedi $|e^x - 0| < \varepsilon$. Nadalje, kako je $\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$, za prethodno navedeni M postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x \in (0,\delta)$ vrijedi $f(x) < M$. Konačno, zaključujemo da za sve $x \in (0,\delta)$ vrijedi $|e^{f(x)} - 0| < \varepsilon$, što zbog proizvoljnosti ε dokazuje tvrdnju.

(b) Pokazat ćemo da limes postoji ako i samo ako je $a > 0$ i tada je limes jednak 0.

Označimo $g(x) := x^a \sin\frac{1}{x}$ Naime, za $a > 0$, vrijedi $\lim_{x\to 0+} a\ln(x) = -\infty$ pa po definiciji potencije i prethodnom podzadatku vrijedi

$$\lim_{x\to 0+} x^a \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0+} e^{a\ln(x)} = 0.$$

Nadalje, kako je funkcija $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ ograničena, vrijedi

$$-x^a \le g(x) \le x^a$$

pa tvrdnja slijedi iz prethodnog računa i teorema o sendviču.

U slučaju $a = 0$ izraz je jednak $\sin\frac{1}{x}$. Promotrimo li nizove $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ i $y_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2n\pi}$, vidimo da vrijedi $x_n \to 0+$, $y_n \to 0+$. S druge strane, kako je

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = 1 \neq -1 = \lim_{n\to\infty} g(y_n)$$

zaključujemo da limes ne postoji.