Osnove teorije vjerojatnosti

Neki riješeni zadaci

PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu

zimski semestar – 2024/25

Zadatak 1. Pokažite da $X_n \xrightarrow{P} X$ povlači $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$ za g neprekidnu na Borelovom skupu C t.d. $\mathbb{P}(X \in C) = 1$.
Rj. Pretpostavimo da tvrdnja ne vrijedi, t.j. da postoje $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ i podniz $(X_{n(k)})$ t.d. $\mathbb{P}(|g(X_{n(k)}) - g(X)| > \varepsilon) > \delta$ za sve k. No taj niz ima popodniz $(X_{n(k)_i})$ na kojem $X_{n(k)_i} \xrightarrow{\text{g.s.}} X$. No skup $\omega \in \Omega$ gdje to vrijedi i gdje je $X(\omega) \in C$ ima vjerojatnost 1 (kao presjek dva skupa vjerojatnosti 1).

Na tom skupu jasno $g(X_{n(k)_i}) \to g(X)$, dakle $g(X_{n(k)_i}) \xrightarrow{\text{g.s.}} g(X)$ i zato $g(X_{n(k)_i}) \xrightarrow{P} g(X)$, što je kontradikcija.

Zadatak 2. (Slutsky) Pretpostavimo da sl. vektori $X, X_n, Y_n, n \geq 1$ u $\mathbb{R}^d$ zadovoljavaju $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n - X_n \xrightarrow{P} 0$, pokažite da vrijedi i $Y_n \xrightarrow{d} X$.
Rj. Po portmanteau teoremu dovoljno je vidjeti $\mathbb{E}g(Y_n) \to \mathbb{E}g(X)$ za proizvoljnu g ograničenu i uniformno neprekidnu. Tada za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ t.d. $|x - y| \leq \delta$ povlači $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Dodatno $|g(x)| < M$ za sve x i neki $M > 0$. Dakle

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}g(Y_n) - \mathbb{E}g(X)| &\leq |\mathbb{E}(g(Y_n) - g(X_n))| + |\mathbb{E}g(X_n) - \mathbb{E}g(X)| \\ &\leq \varepsilon + 2M\mathbb{P}(|X_n - Y_n| > \delta) + |\mathbb{E}g(X_n) - \mathbb{E}g(X)| \end{aligned}$$

gdje smo drugu nejednakost izveli nakon množenja $g(Y_n) - g(X_n)$ sa $\mathbb{1}_{|X_n - Y_n| > \delta} + \mathbb{1}_{|X_n - Y_n| \leq \delta}$. Konačno slijedi da je

$$\limsup_{n\to\infty} |\mathbb{E}g(Y_n) - \mathbb{E}g(X)| = 0$$

jer je ε bio proizvoljan,

Zadatak 3. Pretpostavimo da su sl. vektori $X, X_n,\ n \geq 1$ u $\mathbb{R}^d$, a $X'_n,\ n \geq 1$, u $\mathbb{R}^k$ zadani na istom vjerojatnosnom prostoru, te da zadovoljavaju $X_n \xrightarrow{d} X$, $X'_n \xrightarrow{P} c \in \mathbb{R}^k$, pokažite da vrijedi i $(X_n, X'_n) \xrightarrow{d} (X, c)$, gdje su ti sl. vektori u $\mathbb{R}^{d+k}$.

Rj. Stavimo $\boldsymbol{X}_n = (X_n, c)$ i $\boldsymbol{Y}_n = (X_n, X_n')$, provjerite $\boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{Y}_n \xrightarrow{P} 0$, te da $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{d} (X, c)$ po definiciji. Iz zadatka prije slijedi tvrdnja.

Zadatak 4. Pretpostavimo da sl. vektori X, X_n, Y_n $n \geq 1$ u $\mathbb{R}^d$, zadovoljavaju $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{P} c \in \mathbb{R}^d$, a) pokažite da vrijedi i $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$, te b) $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{d} X \cdot c$ gdje je ovaj zadnji izraz predstavlja skalarno množenje u $\mathbb{R}^d$.
Rj. Iz prethodnog zadatka uočimo $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, c)$. S druge strane, funkcije $g_a(x, y) = x + y$ te $g_b(x, y) = x \cdot y$ su neprekidne. Stoga je za ograničenu i neprekidnu f npr. $f \circ g_a$ neprekidna i ograničena takodjer, pa tvrdnja vrijedi po definiciji.

Zadatak 5. (Delta metoda) Pretpostavite da vrijedi $\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$. Pretpostavimo da je funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilna i t.d. je g' neprekidna u θ i $g'(\theta) \neq 0$. Pokažite da vrijedi

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) \xrightarrow{d} N(0, (g'(\theta))^2 \sigma^2)\,.$$

Rj. Uočite $X_n - \theta = \sqrt{n}(X_n - \theta) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$, po prethodnom zadatku, ovaj produkt konvergira prema 0 po distribuciji, a onda i po vjerojatnosti. Uzmimo sad prozvoljan n i pretpostavimo $X_n > \theta$ ($X_n \leq \theta$ se tretira analogno), tada postoji $\theta_n \in [\theta, X_n]$ po Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti t.d.

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) = g'(\theta_n) \cdot \sqrt{n}(X_n - \theta), .$$

Kako $|\theta_n - \theta| < |X_n - \theta| \xrightarrow{P} 0$, slijedi $\theta_n \xrightarrow{P} \theta$. Zbog neprekidnosti od g' u θ, $g'(\theta_n) \xrightarrow{P} g'(\theta)$. Stoga po prethodnom zadatku gornji izraz konvergira po distribuciji prema $g'(\theta) \cdot Z$ gdje je $Z \sim N(0, \sigma^2)$, odn. slijedi tvrdnja, naime $g'(\theta) \cdot Z \sim N(0, g'(\theta)^2 \sigma^2)$.