Nikomahov teorem

Viktoria Borovec

Nikomah iz Geraze je postklasični helenistički filozof i matematičar (1. – 2. st.). On je u svom djelu *Uvod u aritmetiku* (Introduction to Arithmetic) opisao jednakost:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

Nije dao matematički dokaz u modernom smislu, no prvi je zapisao i opisao identitet pa idući teorem nosi njegovo ime.

Teorem (Nikomahov teorem)

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3, \ \forall n \epsilon \mathbb{N}.$$

Kroz povijest mnogi matematičari ponudili su različite dokaze teorema, ili tek dokaze za specifične slučajeve. Pierre de Fermat je 1636. uveo rekurzivne relacije temeljene na figurativnim brojevima, no izračuni su ubrzo postali vrlo složeni. Blaise Pascal je 1654. otkrio praktičniju formulu za svaku sumu, no još uvijek u rekurzivnom obliku. Prvu zatvorenu formulu za sve sume potencija dobio je Jacob Bernoulli, no takva interpretacija je algebarska. Postoje mnogi dolazi Nikomahovog teorema: algebarski, kombinatorni, vizualni itd.

Opisat ću jedan od vizualnih dokaza:

Lijevu stranu jednakosti prikažemo kao ploču sastavljenu od jediničnih kocaka, pri čemu su kocke koje pripadaju istom pribrojniku unutar zagrade obojane istom bojom.

Desnu stranu jednakosti interpretiramo kao niz kocaka sastavljenih od n^3 jediničnih kocaka, pri čemu je kocka koja je sastavljena od n_i^3 jediničnih kocaka, $i \in \{1,2, \ldots, n\}$ obojana istom bojom kao i jedinične kocke koje pripadaju pribrojniku n_i u lijevoj strani jednakosti.

Link na vizualni prikaz u Geogebri: https://www.geogebra.org/m/bpvux5rt

Jedan moderan dokaz ovog teorema, koji je kombinacija algebre i vizualizacije, pripada Urtzi Buijsu. On kreće od ideje da se zbroj kubova $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3$ može zamisliti kao jedan geometrijski objekt u 4-dimenzionalnom prostoru, tj. kao piramida sastavljena od kocaka. Promatramo 3D presjeke tih piramida te od 4 piramide preslagivanjem dobivamo pravilan oblik. Računanjem ukupnog broja kockica dobije se

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

što znači da je suma kubova kvadrat zbroja $1 + 2 + \cdots + n$.

Izvori:

1) Luciano Ancora, Sum of cubes of the first "n" natural numbers
2) Urtzi Buijs , higher dimensional visual proofs, nicomachus' 4d theorem and the mysterious irreducible factor $(3n^2 + 3n - 1)$in the sum of fourth powers
3) Jelena Bekavac Krcadinac I Vedran Krcadinac, Nikomahov Teorem

Reference: ovdje nabrojati (autor + naslov + godina ako je članak ili knjiga, autor + naslov s ugrađenim hyperlinkom ako je web-izvor)