JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Drugi ispitni rok – 30. lipnja 2025.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Zadatak 1. (30 bodova)

(a) (15 bodova) Zadan je skup

$$S = \left\{ \frac{2x^2n + x^2 + 4n + 2}{x^2n^2 + n^2 + 12x^2 + 12} \mid x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Odredite $\sup S$ i $\inf S$.

(b) (15 bodova) Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadan je s

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{n^n + (n+1)^{2n} + \cdots + (n+k-1)^{kn}}}{4n^3 + n + 1}.$$

Odredite sve prirodne brojeve k za koje je niz konvergentan, te odredite $\lim_{n\to\infty} a_n$ u ovisnosti o k.

JMBAG

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Drugi ispitni rok – 30. lipnja 2025.

Zadatak 2. (20 bodova)

(a) (10 bodova) Odredite sva gomilišta niza

$$\left(\left(\sin\frac{n\pi}{2}+\cos\frac{n\pi}{2}\right)^{\frac{n^2+n}{2}}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(b) (10 bodova) Može li se funkcija

$$f(x,y)=\frac{xy\sin x-xy^4\cos y}{x^2+4y^4}$$

dodefinirati do neprekidne funkcije na čitavom $\mathbb{R}^2$?

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Drugi ispitni rok – 30. lipnja 2025.

Zadatak 3. (25 bodova) Neka je $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x,y) = \frac{x^2\ y\ \sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\ .$$

(a) Može li se f dodefinirati do diferencijabilne funkcije na cijelom $\mathbb{R}^2$?

(b) A do funkcije klase $C^1(\mathbb{R}^2)$?

Napomena: $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1.$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Drugi ispitni rok – 30. lipnja 2025.

Zadatak 4. (25 bodova)

a) (15 bodova) Iskažite i dokažite Lagrangeov teorem srednje vrijednosti za realne funkcije realne varijable.

b) (5 bodova) Za funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadanu s $f(x, y) = (x + 3y, xy, 1)$ odredite $f'(0, 1)(1, 1)$.

c) (5 bodova) Ispitajte kompaktnost i povezanost skupa

$$S = \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1, 2] \cup [3, 4] \cup [5, 6]\}.$$

Odgovor detaljno obrazložite.