JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij – 16. lipnja 2025.

**Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.**

**Zadatak 1.** (13 bodova)
Ispitajte otvorenost/zatvorenost, kompaktnost i povezanost skupa $A \subset \mathbb{R}^2$ zadanog s

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \ , \ |y| > \frac{1}{2} \ , \ xy > 0\} \ .$$

Detaljno obrazložite sve tvrdnje.

JMBAG

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

# Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij – 16. lipnja 2025.

**Zadatak 2.** (15 bodova)
Može li se funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x,y) = \frac{y^2 \ \ln(1+x^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

dodefinirati do funkcije klase $C^1$ na cijelom $\mathbb{R}^2$?

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij – 16. lipnja 2025.

**Zadatak 3.** (10 bodova)

(a) (4 boda) Može li se funkcija $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2+y^6}$ dodefinirati do neprekidne funkcije na $\mathbb{R}^2$? Obrazložite.

(b) (6 bodova) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s $f(x, y) = (x^2, e^y)$. Neka je $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linearan operator čiji je matrični zapis u paru kanonskih baza $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Odredite $(f \circ g)'$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij – 16. lipnja 2025.

**Zadatak 4.** (12 bodova)

(a) (8 bodova) Neka su $(X, d)$ i $(Y, \rho)$ metrički prostori, $x_0 \in X$, $f : X \to Y$ funkcija. Definirajte neprekidnost funkcije $f$ u točki $x_0$. Definirajte uniformnu neprekidnost funkcije $f$. Navedite primjer funkcije koja je neprekidna u svakoj točki svoje domene, ali nije uniformno neprekidna. Obrazložite odgovor. Je li funkcija $g : \overline{K}(0, 1) \to \mathbb{R}$ dana s

$$g(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^5$$

neprekidna funkcija? Je li uniformno neprekidna? Obrazložite odgovore. Napomena: $\overline{K}(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| \leq 1\}$.

(b) (4 boda) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Za sljedeće tvrdnje napišite jesu li (općenito) istinite ili ne. Ako jesu istinite, obrazložite odgovor. Ako nisu istinite, navedite kontraprimjer.

i) Skup $f([0, 1] \cup [2, 3])$ mora biti nepovezan skup u $\mathbb{R}$.

ii) Skup $f^{-1}(\langle -2, -1\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle)$ mora biti otvoren skup u $\mathbb{R}$.

iii) Skup $f([0, 1])$ mora biti segment u $\mathbb{R}$.

iv) Skup $f^{-1}([2, 3])$ mora biti segment u $\mathbb{R}$.

**Rješenje**:

(a) Neka su $p_1, p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ projekcije:

$$p_1(x, y) = x, \quad p_2(x, y) = y.$$

Na predavanjima smo dokazali da su $p_1, p_2$ neprekidne na $\mathbb{R}^2$. Tada je i funkcija $g = p_1^3 + p_2^5$ neprekidna na $\mathbb{R}^2$ kao zbroj umnožaka neprekidnih funkcija. Posebno, $g$ je neprekidna na $\overline{K}(0, 1)$. Uočimo da je $\overline{K}(0, 1)$ omeđen i zatvoren skup u $\mathbb{R}^2$ pa je i kompaktan. Prema teoremu s predavanja zaključujemo da je funkcija $g$ uniformno neprekidna na $\overline{K}(0, 1)$.

Odgovore na sva ostala pitanja u ovom podzadatku možete pronaći u bilješkama s predavanja.

(b)

i) Tvrdnja nije općenito istinita. Uzmimo npr. funkciju

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tada je $f$ neprekidna funkcija i vrijedi $f([0,1] \cup [2,3]) = \{0\}$, a skup $\{0\}$ je povezan skup.

ii) Tvrdnja je istinita. Skup $S = \langle -2, -1 \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle$ je unija dva otvorena skupa u $\mathbb{R}$ pa je $S$ otvoren skup u $\mathbb{R}$. Pošto je $f$ neprekidna, prema teoremu s predavanja, praslika skupa $S$,

$$f^{-1}(S) = f^{-1}(\langle -2, -1 \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle)$$

je otvoren skup u $\mathbb{R}$.

iii) Tvrdnja je istinita. Skup $[0,1]$ je kompaktan i povezan skup u $\mathbb{R}$. Pošto je $f$ neprekidna funkcija, ona čuva povezanost i kompaktnost pa je $f([0,1])$ povezan kompaktan skup u $\mathbb{R}$, a jedini povezani kompaktni skupovi u $\mathbb{R}$ su segmenti. Dakle, $f([0,1])$ mora biti segment u $\mathbb{R}$.

iv) Tvrdnja općenito nije istinita. Uzmimo npr. funkciju

$$f(x) = 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta funkcija je neprekidna. Vrijedi $f^{-1}([2,3]) = \mathbb{R}$, a to nije segment. Mogli smo uzeti i funkciju $f(x) = x^2$. Ta funkcija je također neprekidna i vrijedi

$$f^{-1}([2,3]) = [-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3}],$$

a to nije segment u $\mathbb{R}$.