

Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij - 23. lipnja 2021.

Zadatak 1 (10 bodova)

- (a) (5 bodova) Ispitajte povezanost, otvorenost, zatvorenost i kompaktnost skupa

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y < 0\}.$$

Objasnite sve svoje tvrdnje.

- (b) (5 bodova) Je li funkcija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dana s

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^4}}\right), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

neprekidna u $(0, 0)$?

Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij - 23. lipnja 2021.

Zadatak 2 (10 bodova)

- (a) (5 bodova) Može li se funkcija $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ dana s

$$g(x, y) = \frac{2x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + 3y^2)^2}$$

proširiti do diferencijabilne funkcije na \mathbb{R}^2 ?

- (b) (5 bodova) Postoji li otvorena okolina U točke $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ i funkcija $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ klase C^1 takva da $x^2(h(x, y))^3 + 2 \cos(xy \cdot h(x, y)) = y \ln(h(x, y))$ za $(x, y) \in U$ i $h(0, 1) = e^2$? Ako da, odredite $h'(0, 1)$.

Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij - 23. lipnja 2021.

Zadatak 3 (15 bodova)

- (a) (3 boda) Neka je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definirano s $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1)$ i neka je $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferencijabilno preslikavanje. Napišite parcijalne derivacije funkcija $f \circ g$ i $g \circ f$.
- (b) (6 bodova) Neka je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ funkcija derivabilna na \mathbb{R}^n i neka je $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dokažite da tada f ima sve parcijalne derivacije u x_0 i izvedite matični zapis derivacije $f'(x_0)$ u paru kanonskih baza.
- (c) (6 bodova) Neka je $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i neka su funkcije $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ takve da je g neprekidna u x_0 , f diferencijabilna u x_0 i $f(x_0) = 0$. Dokažite da je tada funkcija $f \cdot g$ diferencijabilna u x_0 .

Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij - 23. lipnja 2021.

Zadatak 4 (15 bodova)

- (a) (2 boda) Neka su A, B, C neprazni podskupovi metričkog prostora (X, d) takvi da je skup A nepovezan, a skup C povezan skup. Mora li skup $A \times B$ biti nepovezan? Mora li skup $B \times C$ biti povezan? Obrazložite odgovore.
- (b) (4 boda) Iskažite Taylorov teorem srednje vrijednosti za funkcije iz \mathbb{R}^n u \mathbb{R} . Odredite Taylorov polinom reda 3 funkcije $f(x, y) = \sin(3x - y)$ u točki $(0, 0)$.
- (c) (6 bodova) Neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ kvadar i neka je $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na K . Dokažite da je funkcija f R-integrabilna na K .
- (d) (3 boda) Zadana je funkcija $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ s

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x, y \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{2}, & x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q} \\ \frac{3}{4}, & x \notin \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Je li funkcija f R-integrabilna na $[0, 1] \times [0, 1]$? Obrazložite odgovor.