JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Prvi ispitni rok – 16. lipnja 2025.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Zadatak 1. (20 bodova)

(a) (14 bodova) Zadan je skup

$$S = \left\{ \frac{nx\sin(x) + nx}{nx + n + 2x + 2} : n \in \mathbb{N}, x \in [1, \infty\rangle \right\}.$$

Odredite $\sup S$ i $\inf S$.

(b) (6 bodova) Odredite

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^4 \sin(\cos(n^{2025})) + n\cos(\sin(n^{2025}))}{n - n^5}.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Prvi ispitni rok – 16. lipnja 2025.

Zadatak 2. (25 bodova)

(a) (18 bodova) Ispitajte je li niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadan rekurzivno s

$$a_1 = -1, \quad a_{n+1} = 3 - \frac{2}{a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

konvergentan te ako je, odredite mu limes.

(b) (7 bodova) Neka je $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ preslikavanje zadano s

$$d(x,y) = \sqrt{|x-y|}\,, \qquad x,y\in\mathbb{R}\,.$$

Pokažite ili opovrgnite da je preslikavanje d metrika na $\mathbb{R}$.

JMBAG

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Prvi ispitni rok – 16. lipnja 2025.

Zadatak 3. (30 bodova)
Može li se funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x,y) = \frac{y^2\ \ln(1+x^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

dodefinirati do funkcije klase C^1 na cijelom $\mathbb{R}^2$?

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Prvi ispitni rok – 16. lipnja 2025.

Zadatak 4. (25 bodova)

(a) (12 bodova) Iskažite i dokažite teorem o sendviču.

(b) (13 bodova) Neka su (X, d) i (Y, ρ) metrički prostori, $x_0 \in X$, $f : X \to Y$ funkcija. Definirajte neprekidnost funkcije f u točki x_0. Definirajte uniformnu neprekidnost funkcije f. Navedite primjer funkcije koja je neprekidna u svakoj točki svoje domene, ali nije uniformno neprekidna. Obrazložite odgovor. Je li funkcija $g : \overline{K}(0,1) \to \mathbb{R}$ dana s

$$g(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^5$$

neprekidna funkcija? Je li uniformno neprekidna? Obrazložite odgovore. Napomena: $\overline{K}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| \leq 1\}$.

Rješenje:

(a) Vidjeti predavanja.

(b) Neka su $p_1, p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ projekcije:

$$p_1(x, y) = x, \quad p_2(x, y) = y.$$

Na predavanjima smo dokazali da su p_1, p_2 neprekidne na $\mathbb{R}^2$. Tada je i funkcija $g = p_1^3 + p_2^5$ neprekidna na $\mathbb{R}^2$ kao zbroj umnožaka neprekidnih funkcija. Posebno, g je neprekidna na $\overline{K}(0,1)$. Uočimo da je $\overline{K}(0,1)$ omeđen i zatvoren skup u $\mathbb{R}^2$ pa je i kompaktan. Prema teoremu s predavanja zaključujemo da je funkcija g uniformno neprekidna na $\overline{K}(0,1)$.

Odgovore na sva ostala pitanja u ovom podzadatku možete pronaći u bilješkama s predavanja.