Fakultativni kolegij *Studentska natjecanja iz matematike*, ak. god. 2024./2025.
`http://www.pmf.unizg.hr/math/predmet/snim_a`

Tema br. 10:

Ortogonalnost u normiranim prostorima

Mateo Tomašević, 13. 06. 2025.

1 Ortogonalnost

Teorem 1 (Jordan–Von Neumann). *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normiran prostor. Tada $\|\cdot\|$ potječe od skalarnog produkta ako i samo ako vrijedi* ***relacija paralelograma****:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \qquad \forall x, y \in X.$$

U tom slučaju taj skalarni produkt je jedinstven i dan ***polarizacijskim formulama****:*

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), \qquad \mathbb{F} = \mathbb{R},$$
$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2), \qquad \mathbb{F} = \mathbb{C}.$$

Neka je U unitaran prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Za $x, y \in U$ kažemo da su **ortogonalni** (i pišemo $x \perp y$) ako je $\langle x, y\rangle = 0$.

Svojstva ortogonalnosti:

(1) $x \perp x \iff x = 0$, za sve $x \in U$ (*nedegeneriranost*),

(2) $x \perp y \implies y \perp x$, za sve $x, y \in U$ (*simetrija*),

(3) $x \perp y \implies \alpha x \perp \beta y$, za sve $x, y \in U$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ (*homogenost*),

(4) $x \perp y, z \implies x \perp (y+z)$, za sve $x, y, z \in U$ (*aditivnost*),

(5) $x_n \perp y_n, \forall n \in \mathbb{N} \implies x \perp y$, za sve nizove $(x_n)_n, (y_n)_n$ u U i $x, y \in U$ takve da $x_n \to x, y_n \to y$ (*neprekidnost*).

(6) za sve $x, y \in U$ postoji $\alpha \in \mathbb{F}$ takav da $x \perp \alpha x + y$ (*egzistencija*).

Kako ortogonalnost vektora iskazati isključivo preko norme?

Propozicija 2. *Neka je U unitaran prostor te $x, y \in U$. Tada je*

$$x \perp y \iff \|x\| \le \|x + \lambda y\|, \forall \lambda \in \mathbb{F}.$$

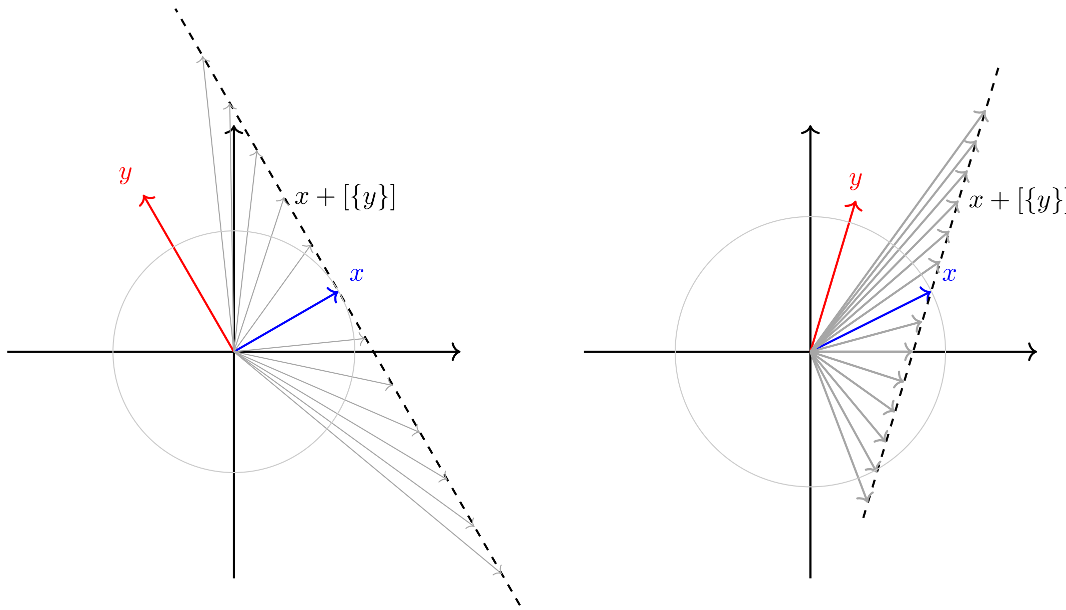
Dokaz. Pretpostavimo $y \neq 0$. Za sve $\lambda \in \mathbb{F}$ imamo

$$\|x+\lambda y\|^2 - \|x\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, \lambda y\rangle + \|\lambda y\|^2 - \|x\|^2 = 2\operatorname{Re}(\overline{\lambda}\langle x, y\rangle) + |\lambda|^2\|y\|^2. \tag{1}$$

Ako je $\langle x, y\rangle = 0$, tada je (1) očito ≥ 0. Obratno, ako je (1) ≥ 0 za sve $\lambda \in \mathbb{F}$, tada specijalno za $\lambda := -\frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$ dobivamo

$$0 \le 2\operatorname{Re}(\overline{\lambda}\langle x, y\rangle) + |\lambda|^2\|y\|^2 = -\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|y\|^2} \le 0 \implies \langle x, y\rangle = 0.$$

□



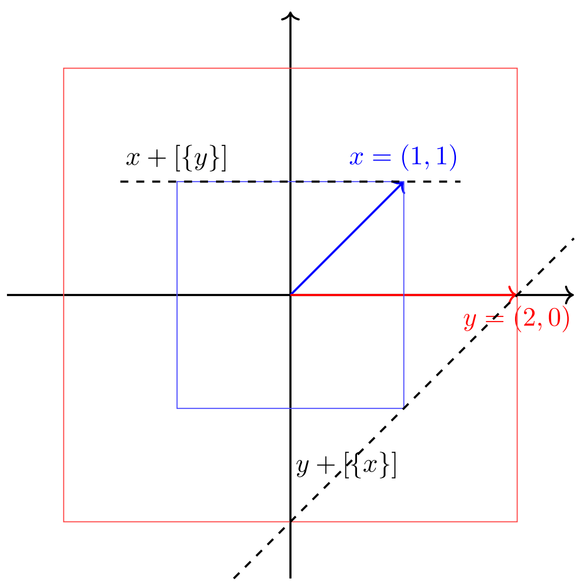
Cilj je uvesti pojam ortogonalnosti u opći normirani prostor. Neka je X normiran prostor. Za $x, y \in X$ kažemo da je **vektor x Birkhoff-James ortogonalan na vektor y** (i pišemo $x \perp_{BJ} y$) ako

$$\|x\| \leq \|x + \lambda y\|, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{F}.$$

Lako se provjeri da je Birkhoff-James ortogonalnost nedegenerirana, homogena i neprekidna. Međutim, nije simetrična ni aditivna. Zaista, promotrimo normiran prostor $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ gdje je

$$\|(x, y)\|_\infty := \max\{|x|, |y|\}.$$

Tada imamo $(1,1) \perp_{BJ} (2,0)$, ali $(2,0) \not\perp_{BJ} (1,1)$. Nadalje, imamo $(1,1) \perp_{BJ} (2,0), (0,2)$, ali $(1,1) \not\perp_{BJ} (2,2)$.



James [4] je pokazao sljedeće: ako je X normiran prostor dimenzije ≥ 3 u kojem je $\perp_{BJ}$ simetrična, tada je riječ o unitarnom prostoru.

Neka su $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normirani prostori. Za linearan operator $A : X \to Y$ kažemo da je **ograničen** ako postoji konstanta $M > 0$ takva da je $\|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X$. Lako se pokaže da je A ograničen ako i samo ako je neprekidan.

Označimo s $\mathbb{B}(X,Y)$ skup svih ograničenih linearnih operatora $X \to Y$. Primijetimo da je $\mathbb{B}(X,Y)$ potprostor prostora $L(X,Y)$ svih linearnih operatora $X \to Y$. Na $\mathbb{B}(X,Y)$ definiramo normu

$$\|A\| := \sup_{x \in S_X} \|Ax\|_Y, \tag{2}$$

gdje je

$$S_X := \{x \in X : \|x\|_X = 1\}$$

' **jediničma sfera** u X. Također vrijedi:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \inf\{M > 0 : \|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X, \forall x \in X\}. \tag{3}$$

U slučaju linearnih funkcionala, na polju $\mathbb{F}$ promatramo apsolutnu vrijednost $|\cdot|$ kao normu te definiramo **dualni prostor** $X^* := \mathbb{B}(X, \mathbb{F})$.

Teorem 3 (Hahn-Banach)**.** *Neka je X normiran prostor, $Y \leq X$ i $f \in Y^*$. Postoji $F \in X^*$ takav da je $F|_Y = f$ i $\|F\| = \|f\|$.*

Dokaz. Dokazat ćemo teorem u slučaju kad je X realan konačnodimenzionalan normirani prostor; za opći slučaj pogledajte [2]. Evidentno je dovoljno dokazati sljedeće: neka su $Y \lneq X$, $x_0 \in X \setminus Y$ te $f \in Y^*$. Tada postoji funkcional $F : Y \dotplus [\{x_0\}] \to \mathbb{R}$ takav da $F|_Y = f$ i $\|F\| = \|f\|$.

Tvrdnja je trivijalna za $f = 0$ pa normiranjem bez smanjenja općenitosti smijemo pretpostaviti da je $\|f\| = 1$. Budući da je svaki vektor iz $Y \dotplus [\{x_0\}]$ prikaziv kao $\lambda x_0 + y$ za neki $\lambda \in \mathbb{R}, y \in Y$, funkcional F će biti jedinstveno određen izborom vrijednosti $F(x_0) \in \mathbb{R}$ jer tada

$$F(\lambda x_0 + y) := \lambda F(x_0) + f(y), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, y \in Y$$

jest dobro definiran linearan funkcional koji proširuje f. Nadalje, vrijedi

$$\|F\| = \sup_{x \in S_{M \dotplus [x_0]}} |F(x)| \geq \sup_{x \in S_M} |F(x)| = \sup_{x \in S_M} |f(x)| = \|f\| = 1.$$

Vrijednost $F(x_0)$ treba odabrati tako da vrijedi

$$\begin{aligned}
\|F\| = 1 &\iff \|F\| \leq 1 \\
&\iff |F(z)| \leq \|z\|, \forall z \in M \dotplus [x_0], \\
&\iff |F(\lambda x_0 + y)| \leq \|\lambda x_0 + y\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, y \in Y \\
&\iff |\lambda F(x_0) + f(y)| \leq \|\lambda x_0 + y\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, y \in Y \\
&\iff -\|\lambda x_0 + y\| \leq \lambda F(x_0) + f(y) \leq \|\lambda x_0 + y\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, y \in Y \\
&\iff -\left\|x_0 + \frac{y}{\lambda}\right\| - f\left(\frac{y}{\lambda}\right) \leq F(x_0) \leq \left\|x_0 + \frac{y}{\lambda}\right\| - f\left(\frac{y}{\lambda}\right), \forall \lambda \in \mathbb{R}, y \in Y \\
&\iff -\|x_0 + z\| - f(z) \leq F(x_0) \leq \|x_0 + z\| - f(z), \forall z \in Y.
\end{aligned}$$

Da bi posljednji uvjet bio zadovoljen, dovoljno je odabrati

$$\sup_{z_1 \in Y} (-\|x_0 + z_1\| - f(z_1)) \leq F(x_0) \leq \inf_{z_2 \in Y} (\|x_0 + z_2\| - f(z_2)). \tag{4}$$

Za proizvoljne $z_1, z_2 \in Y$ imamo

$$f(z_2) - f(z_1) = f(z_2 - z_1) \leq \|z_2 - z_1\| \leq \|x_0 + z_2\| + \|x_0 + z_1\|$$

i stoga

$$-\|x_0 + z_1\| - f(z_1) \leq \|x_0 + z_2\| - f(z_2).$$

Zaključujemo

$$\sup_{z_1 \in Y} (-\|x_0 + z_1\| - f(z_1)) \leq \inf_{z_2 \in Y} (\|x_0 + z_2\| - f(z_2))$$

pa odabir $F(x_0)$ iz (4) uvijek možemo učiniti. $\square$

Primjer 1. Na potprostoru $Y := [\{(1,2)\}]$ normiranog prostora $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ zadan je funkcional $f \in Y^*$ formulom $f(x,y) := x$. Tada je $F \in X^*$ zadan s $F(x,y) := \frac{x}{5} + \frac{2y}{5}$ jedinstveno Hahn-Banachovo proširenje od F. Zaista, prvo izračunajmo normu od f. Za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$|f(x, 2x)| = |x| = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{|x|^2 + |2x|^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \|(x, 2x)\|_2$$

odakle slijedi $\|f\| = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Dakle, tražimo sve funkcionale $F \in X^*$ takve da je $\|F\| = \frac{1}{\sqrt{5}}$ i $F(1,2) = 1$. Prema Rieszovom teoremu reprezentacije, svaki funkcional $F \in X^*$ reprezentira se u obliku

$$F(x,y) = ax + by = \langle (x,y), (a,b) \rangle, \qquad \text{za neki } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Štoviše, vrijedi $\|F\| = \|(a,b)\|_2$. Zaista, za sve $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ imamo

$$|F(x,y)| = |\langle (x,y), (a,b) \rangle| \overset{\text{CSB}}{\leq} \|(x,y)\|_2 \|(a,b)\|_2$$

te se jednakost postiže za $(x,y) = (a,b)$. Dakle, tražimo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sa svojstvom

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{1}{5}, \\ a + 2b = 1. \end{cases}$$

Lagani račun pokazuje da je $(a,b) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ jedinstveno rješenje.

Korolar 4. *Neka je X normiran prostor i $x \in X$. Tada postoji $f \in X^*, \|f\| = 1$ takav da je $f(x) = \|x\|$.*

Za vektor $e_1 = (1,0)$ u normiranom prostoru $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ odredimo sve funkcionale $f \in X^*$ iz Korolara 4. Primijetimo prvo da je svaki linearan funkcional $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ oblika $f(x_1, x_2) := a_1 x_1 + a_2 x_2$ za neki $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Nadalje, za sve $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ imamo

$$|f(x_1, x_2)| = |a_1 x_1 + a_2 x_2| \leq |a_1||x_1| + |a_2||x_2| \leq (|a_1| + |a_2|)\|(x_1, x_2)\|_\infty = \|(a_1, a_2)\|_1 \|(x_1, x_2)\|_\infty$$

pa je f ograničen i $\|f\| \leq \|(a_1, a_2)\|_1$. Obratno (za $f \neq 0$), imamo

$$\|f\| \geq \frac{|f(\operatorname{sgn} a_1, \operatorname{sgn} a_2)|}{\|(\operatorname{sgn} a_1, \operatorname{sgn} a_2)\|_\infty} = \frac{|a_1| + |a_2|}{1} = \|(a_1, a_2)\|_1.$$

Tražimo funkcional $f \in X^*$ (reprezentiran s $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$) sa svojstvima

$$1 = \|e_1\|_\infty = f(e_1) = a_1, \qquad 1 = \|f\| = |a_1| + |a_2|.$$

Slijedi $a_1 = 1, a_2 = 0$ pa je jasno da je $f(x_1, x_2) = x_1$ jedinstveni takav funkcional.

S druge strane, ako isto pokušamo za vektor $x_0 = (1,1)$, dobivamo uvjete

$$1 = \|x_0\|_\infty = f(x_0) = a_1 + a_2, \qquad 1 = \|f\| = |a_1| + |a_2|.$$

Svi takvi funkcionali su oblika $f(x_1, x_2) := \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$, za proizvoljan $\alpha \in [0,1]$.

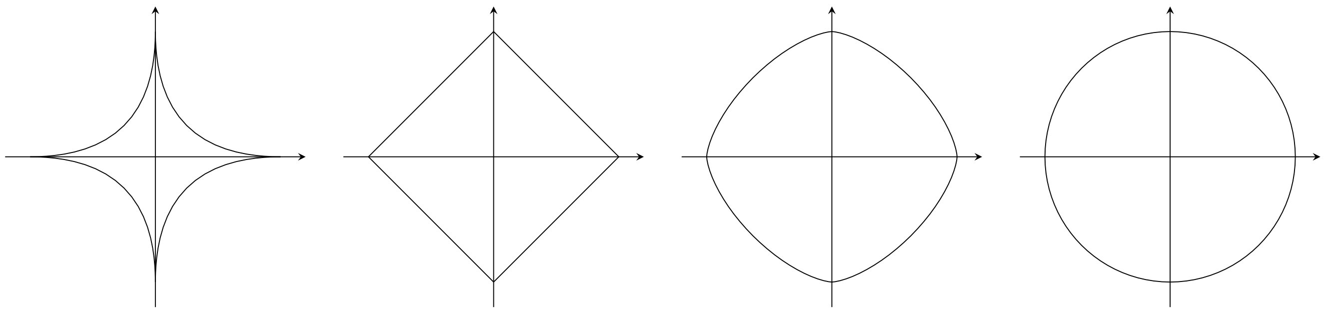
2 Glatkoća

Neka je X normiran prostor. Za $x \in X \setminus \{0\}$ kažemo da je **glatka točka** od X ako postoji jedinstven $f \in X^*, \|f\| = 1$ takav da $f(x) = \|x\|$. Za X kažemo da je **gladak** ako je svaka točka od $X \setminus \{0\}$ glatka.

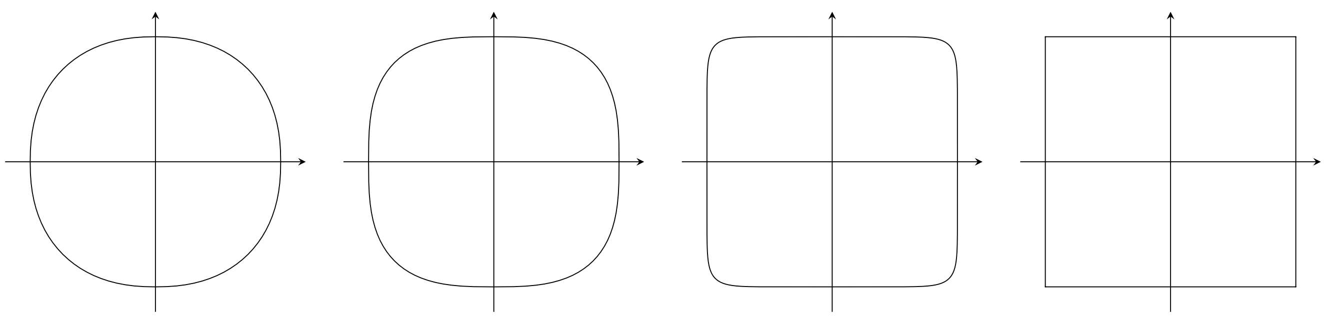
Lako se pokaže da su sve točke od S_X u normiranom prostoru $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ osim $(\pm 1, \pm 1)$ glatke. Za $p \in [1, +\infty\rangle$ definiramo normu

$$\|(x, y)\|_p := (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Može se pokazati da je $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ gladak prostor za sve $p \in \langle 1, +\infty\rangle$.



$p = \frac{1}{2}$ $\quad$ $p = 1$ $\quad$ $p = \frac{3}{2}$ $\quad$ $p = 2$



$p = 2.3$ $\quad$ $p = 3$ $\quad$ $p = 10$ $\quad$ $p = \infty$

Lema 5 ([3, Theorem 2.1])**.** *Neka je X normiran prostor i $f \in X^* \setminus \{0\}$ funkcional. Tada za svaki $x \in X$ vrijedi*

$$|f(x)| = \|f\|\|x\| \iff x \perp_{BJ} \ker f.$$

Dokaz. $\boxed{\Longrightarrow}$ Neka su $y \in \ker f$ i $\lambda \in \mathbb{F}$ proizvoljni. Imamo

$$\|f\|\|x\| = |f(x)| = |f(x + \lambda y)| \leq \|f\|\|x + \lambda y\|$$

odakle slijedi $\|x\| \leq \|x + \lambda y\|$ te zbog proizvoljnosti λ zaključujemo $x \perp_{BJ} y$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $x \notin \ker f$ inače odmah slijedi $x = 0$. Pretpostavimo da je $|f(x)| = p\|x\|$ za neki $p > 0$. Očito je $p \leq \|f\|$. Primijetimo sada da je $X = [\{x\}] \dotplus \ker f$. Zaista, za svaki $z \in X$ vrijedi

$$z = \underbrace{\frac{f(z)}{f(x)}x}_{\in[\{x\}]} + \underbrace{z - \frac{f(z)}{f(x)}x}_{\in \ker f}.$$

Za sve $y \in \ker f, \alpha \in \mathbb{F}^\times$ imamo

$$|f(\alpha x + y)| = |\alpha||f(x)| = p|\alpha|\|x\| \leq p|\alpha|\left\|x + \frac{1}{\alpha}y\right\| = p\|\alpha x + y\|$$

i stoga $\|f\| \leq p$. Zaključujemo $p = \|f\|$, što smo i trebali dokazati. $\square$

Primjer 2. Za $X = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$ promotrimo $f \in X^*$ zadan s

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3.$$

Tada je

$$\|f\| = \|(1,1,1)\|_1 = 3, \qquad f(1,1,1) = 3 = \|f\|\|(1,1,1)\|_\infty$$

pa iz Leme 5 slijedi

$$(1,1,1) \perp_{BJ} \ker f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Zaista, za $(x_1, x_2, x_3) \in \ker f$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ imamo

$$\|(1 + \lambda x_1, 1 + \lambda x_2, 1 + \lambda x_3)\|_\infty \geq \frac{1}{3}((1 + \lambda x_1) + (1 + \lambda x_2) + (1 + \lambda x_3)) = 3 = \|(1,1,1)\|_\infty.$$

Propozicija 6 ([3, Theorem 2.1])**.** *Neka je X normiran prostor, $x \in X$ te $M \leq X$ potprostor. Vrijedi:*

$$x \perp_{BJ} M \iff \exists f \in X^*, \|f\| = 1 \text{ takav da } f(x) = \|x\|, f|_M \equiv 0.$$

Dokaz. $\boxed{\Longleftarrow}$ Vrijedi $|f(x)| = \|f\|\|x\|$ pa prema Lemi 5 slijedi $x \perp_{BJ} \ker f \supseteq M$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Definirajmo linearan funkcional $f : M + [\{x\}] \to \mathbb{F}$ formulom

$$f(\alpha x + y) := \alpha\|x\|, \qquad \alpha \in \mathbb{F}, y \in M.$$

Sada je

$$|f(\alpha x + y)| = |\alpha|\|x\| \leq |\alpha| \left\| x + \frac{1}{\alpha} y \right\| \leq \|\alpha x + y\|$$

odakle slijedi $\|f\| \leq 1$. Obratna nejednakost slijedi iz $f(x) = \|x\|$. Sada primijenimo Hahn-Banachov teorem. $\square$

Specijalno, za $x, y \in X$ vrijedi

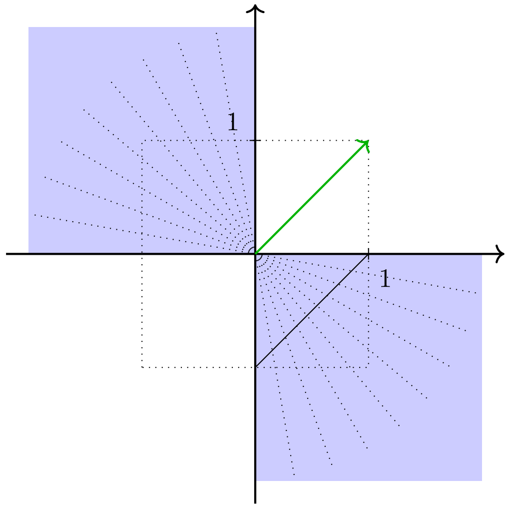
$$x \perp_{BJ} y \iff \exists f \in X^*, \|f\| = 1 \text{ takav da } f(x) = \|x\|, f(y) = 0. \tag{5}$$

Za svaki $x \in X$ lagano očitavamo

$$x^{\perp_{BJ}} := \{y \in X : x \perp_{BJ} y\} = \bigcup_{f \in S_{X^*}, f(x) = \|x\|} \ker f.$$

Primjer 3. U normiranom prostoru $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ nađimo $(1,1)^{\perp_{BJ}}$. Tražimo sve funkcionale $f \in X^*$, $f(x,y) = ax + by$ koji zadovoljavaju $\|f\| = 1$ i $f(1,1) = \|(1,1)\|_\infty = 1$. Ranije smo vidjeli da su svi traženi funkcionali oblika $f_\alpha(x,y) = \alpha x + (1-\alpha)y$, za $\alpha \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} (1,1)^{\perp_{BJ}} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \ker f_\alpha = \{\lambda(\alpha - 1, \alpha) : \alpha \in [0,1], \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= (\langle -\infty, 0] \times [0, +\infty\rangle) \cup ([0, +\infty\rangle \times \langle -\infty, 0]). \end{aligned}$$



Propozicija 7 ([3, Corollary 2.2])**.** *Neka je X normiran prostor. Tada za sve $x, y \in X$ postoji $\alpha \in \mathbb{F}$ takav da $x \perp_{BJ} \alpha x + y$.*

Dokaz. Fiksirajmo $x \in X \setminus \{0\}$ te prema Korolaru 4 odaberimo neki $f \in S_{X^*}$ takav da $f(x) = \|x\|$. Za proizvoljan $y \in Y$ tada imamo $x \perp_{BJ} \ker f \ni -\frac{f(y)}{\|x\|}x + y$. $\square$

Za vektor $x \in X \setminus \{0\}$ kažemo da je $\perp_{BJ}$ **desno jedinstvena u** x ako za svaki $y \in X$ postoji jedinstven $\alpha \in \mathbb{F}$ takav da $x \perp_{BJ} \alpha x + y$. Kažemo da je $\perp_{BJ}$ **desno aditivna u** x ako za sve $y, z \in X$ vrijedi $x \perp_{BJ} y, z \implies x \perp_{BJ} (y + z)$.

Teorem 8 ([3, Theorem 5.1])**.** *Neka je X normiran prostor i $x \in X \setminus \{0\}$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) x je glatka točka,

(ii) $\perp_{BJ}$ je desno aditivna u x,

(iii) $\perp_{BJ}$ je desno jedinstvena u x.

Dokaz. $\boxed{(i) \implies (ii)}$ Pretpostavimo $x \perp_{BJ} y, z$. Prema (5), postoje $f, g \in S_{X^*}$ takvi da je $f(x) = g(x) = \|x\|$ i $f(y) = g(z) = 0$. Budući da je x glatka točka od X, zaključujemo da je $g = f$ i stoga $f(y + z) = f(y) + f(z) = 0$. Iz (5) ponovno slijedi $x \perp_{BJ} (y + z)$.

$\boxed{(ii) \implies (iii)}$ Pretpostavimo da za neki $y \in X$ i skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ vrijedi $x \perp_{BJ} (\alpha x + y)$ i $x \perp_{BJ} (\beta x + y)$. Zbog homogenosti i aditivnosti slijedi

$$x \perp_{BJ} (\alpha x + y) - (\beta x + y) = (\alpha - \beta)x.$$

Kad bi bilo $\alpha \neq \beta$, iz homogenosti $\perp_{BJ}$ slijedilo bi $x \perp_{BJ} x$ i stoga $x = 0$, što je kontradikcija.

$\boxed{(iii) \implies (i)}$ Neka su $f, g \in S_{X^*}$ takvi da je $f(x) = g(x) = \|x\|$ te neka je $y \in X$ proizvoljan. Prema (5) imamo

$$x \perp_{BJ} \underbrace{-\frac{f(y)}{\|x\|}x + y}_{\in \ker f}, \underbrace{-\frac{g(y)}{\|x\|}x + y}_{\in \ker g} \overset{(iii)}{\implies} -\frac{f(y)}{\|x\|} = -\frac{g(y)}{\|x\|}.$$

Slijedi $f \equiv g$. $\square$

3 Stroga konveksnost

Za normiran prostor X kažemo da je **strogo konveksan** ako za sve $x, y \in X$ vrijedi

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \implies x = 0 \text{ ili } \exists \alpha \geq 0 \text{ takav da } y = \alpha x.$$

Primjer 4. $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ je strogo konveksan. Zaista, pretpostavimo da je $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ za neke $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Ako $z_1 \neq 0$, dijeljenjem obje strane s $|z_1|$ dobivamo

$$\left|1 + \frac{z_2}{z_1}\right| = 1 + \left|\frac{z_2}{z_1}\right|.$$

Stoga je dovoljno pokazati da za $w = a + ib \in \mathbb{C}$ jednakost $|1 + w| = 1 + |w|$ povlači da je w nenegativan realan broj. Imamo

$$\sqrt{(a+1)^2 + b^2} = 1 + \sqrt{a^2 + b^2}$$

odakle kvadriranjem slijedi

$$(a+1)^2 + b^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2+b^2} \implies 2a = 2\sqrt{a^2+b^2}$$

pa je $b = 0$ i $a \geq 0$.

Propozicija 9. *Neka je X normiran prostor. Ekvivalentno je:*

(i) X je strogo konveksan,

(ii) za sve različite $x, y \in S_X$ vrijedi $\|x+y\| < 2$,

(iii) za sve različite $x, y \in S_X$ vrijedi $\|(1-\alpha)x + \alpha y\| < 1, \forall \alpha \in \langle 0, 1\rangle$.

Dokaz. Za zadaću. □

Zadnji uvjet znači da S_X ne smije sadržavati segment. Za prostor $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ stoga jednostavno zaključujemo da jest strogo konveksan. Štoviše, isto se može pokazati za $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ za $p \in \langle 1, +\infty\rangle$. Za $p = 1, \infty$ to nije slučaj:

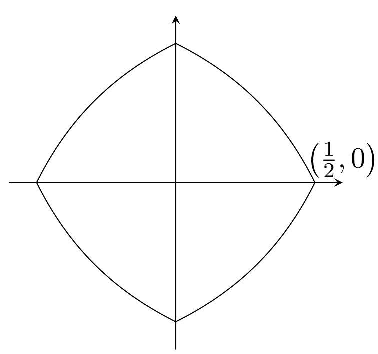
$$\|(2,0)\|_\infty = 2 = \|(1,1)\|_\infty + \|(1,-1)\|_\infty, \qquad \|(1,1)\|_1 = 2 = \|(1,0)\|_1 + \|(0,1)\|_1 \tag{6}$$

Isti zaključi su vrijedili i za glatkoću. Iako oba svojstva govore o geometriji jedinične sfere, ona su općenito logički nezavisna.

Primjer 5. Promotrimo normiran prostor $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ gdje je

$$\|x\| := \|x\|_1 + \|x\|_2.$$

Tvrdimo da je prostor X strogo konveksan, ali nije gladak. Jedinična sfera S_X izgleda ovako:



Pokažimo strogu konveksnost. Pretpostavimo da su $x, y \in X$ vektori takvi da je $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Tada imamo

$$\begin{aligned}\|x\|_1 + \|x\|_2 + \|y\|_1 + \|y\|_2 &= \|x\| + \|y\| = \|x+y\| \\ &= \|x+y\|_1 + \|x+y\|_2 \\ &\leq \|x\|_1 + \|y\|_1 + \|x\|_2 + \|y\|_2.\end{aligned}$$

Slijedi

$$\|x+y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1, \qquad \|x+y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2$$

pa iz stroge konveksnosti prostora $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ slijedi $x \neq 0$ ili $y = \alpha x$ za neki $\alpha \geq 0$, što smo i trebali dokazati. Pokažimo sada da X nije gladak. Tvrdimo da za $e_1 = (1,0)$ funkcionali $f_1, f_2 \in X^*$ zadani s

$$f_1(x,y) := 2x + y, \qquad f_2(x,y) := 2x - y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

zadovoljavaju $f_1, f_2 \in S_{X^*}$ i $f_1(e_1) = f_2(e_1) = 2 = \|e_1\|$, ali evidentno $f_1 \neq f_2$. Zaista, za sve $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ imamo

$$|f_{1,2}(x,y)| = |2x \pm y| \leq |x| + |x \pm y| \leq \sqrt{|x|^2 + |y|^2} + |x| + |y| = \|(x,y)\|_2 + \|(x,y)\|_1$$

pa slijedi $\|f_{1,2}\| \leq 1$. Obratnu nejednakost dobivamo iz

$$\|f_{1,2}\| \geq \frac{f_{1,2}(e_1)}{\|e_1\|} = \frac{2}{2} = 1.$$

Primjer normiranog prostora koji je gladak, ali ne i strogo konveksan nalazi se u zadacima za zadaću.

Lema 10 ([5, Theorem 2]). *Neka je X normiran prostor. Tada je za vektore $x, y \in X$ ekvivalentno:*

(i) $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$,

(ii) postoji $f \in S_{X^*}$ takav da je $f(x) = \|x\|$ i $f(y) = \|y\|$.

Dokaz. $\boxed{(ii) \implies (i)}$ Imamo

$$\|x\| + \|y\| = f(x) + f(y) = f(x+y) = |f(x+y)| \leq \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

pa slijedi $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.

$\boxed{(i) \implies (ii)}$ Prema Korolaru 4 odaberimo neki $f \in S_{X^*}$ takav da je $f(x+y) = \|x+y\|$. Tada je

$$\|x\| + \|y\| \overset{(i)}{=} \|x+y\| = f(x+y) = f(x) + f(y) = |f(x) + f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq \|x\| + \|y\| \tag{7}$$

pa slijedi $|f(x) + f(y)| = |f(x)| + |f(y)|$. Iz stroge konveksnosti prostora $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ slijedi da je $f(x) = 0$ ili postoji $\alpha \geq 0$ takav da $f(y) = \alpha f(x)$. Pretpostavimo prvo da je $f(x) = 0$. Tada je

$$\|x\| + \|y\| \overset{(i)}{=} \|x+y\| = f(x+y) = f(y) \leq \|y\|$$

odakle slijedi $\|x\| = 0 = f(x)$ i $f(y) = \|y\|$. Pretpostavimo sada drugu mogućnost, tj. da $f(y) = \alpha f(x)$ za neki $\alpha \geq 0$. Tada je

$$\underbrace{(1+\alpha)}_{>0} f(x) = f(x) + f(y) = \|x+y\| \geq 0 \implies f(x) \geq 0 \implies f(y) = \alpha f(x) \geq 0$$

pa povratkom u (7) slijedi $f(x) = \|x\|$ i $f(y) = \|y\|$. $\square$

Propozicija 11 (Arambašić, Rajić, [1, Proposition 4.1]). *Neka je X normiran prostor i $x, y \in X$. Ekvivalentno je:*

(i) $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$,

(ii) $x \perp_{BJ} (\|y\|x - \|x\|y)$,

(iii) $y \perp_{BJ} (\|y\|x - \|x\|y)$.

Dokaz. Za zadaću. $\square$

Teorem 12 ([3, Theorem 4.3]). *Neka je X normiran prostor. Tada je X strogo konveksan ako i samo ako za sve $x, y \in X$ postoji jedinstven $\alpha \in \mathbb{F}$ takav da $\alpha x + y \perp_{BJ} x$.*

4 Zadaci za zadaću

Za uspješno rješavanje zadaće potrebno je riješiti barem 8 zadataka. Rok za predaju zadaće je ponedjeljak 30. 6.

Zadatak 1. Neka je U unitaran prostor te $x, y \in U$ proizvoljni. Dokažite da je ekvivalentno:

(i) $x \perp y$,

(ii) $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|, \forall \lambda \in \mathbb{F}$.

Nadalje, ako je U realan, dokažite da su tim tvrdnjama ekvivalentne i sljedeće:

(iii) $\|x+y\| = \|x-y\|$,

(iv) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Zadatak 2. Neka je U realan unitaran prostor te $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ fiksiran. Dokažite da sve $x, y \in U$ vrijedi

$$x \perp y \iff (1+\alpha^2)\|x+y\|^2 = \|\alpha x + y\|^2 + \|x + \alpha y\|^2.$$

Zadatak 3. Neka je U unitaran prostor. Dokažite da sve $x, y \in U$ vrijedi

$$x \perp y \iff \sup\{|\langle x, a\rangle\langle y, b\rangle - \langle y, a\rangle\langle x, b\rangle| : a, b \in U, \|a\| = \|b\| = 1\} = \|x\|\|y\|.$$

Zadatak 4. Neka je U unitaran prostor i $\varepsilon \in [0, 1\rangle$. Dokažite da sve $x, y \in U$ vrijedi

$$|\langle x, y\rangle| \leq \varepsilon\|x\|\|y\| \iff \sqrt{1-\varepsilon^2}\|x\| \leq \|x + \lambda y\|, \forall y \in \mathbb{F}.$$

Zadatak 5. Neka je X normiran prostor i $x, y \in X \setminus \{0\}$. Dokažite da je ekvivalentno:

(i) $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$,

(ii) $\left\|\alpha \frac{x}{\|x\|} + (1-\alpha)\frac{y}{\|y\|}\right\| = 1$ za sve $\alpha \in [0, 1]$,

(iii) $x + y \neq 0$ i $\exists \alpha \in \langle 0, 1\rangle$ takav da $\frac{x+y}{\|x+y\|} = \alpha \frac{x}{\|x\|} + (1-\alpha)\frac{y}{\|y\|}$.

Zadatak 6. Neka je X normiran prostor i $x, y \in X$ takvi da je $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Dokažite da za sve skalare $\alpha, \beta \geq 0$ vrijedi $\|\alpha x + \beta y\| = \alpha\|x\| + \beta\|y\|$.

Zadatak 7. Dokažite da je operatorska norma zadana s (2) zaista norma, te dokažite relacije (3).

Zadatak 8. Odredite sve glatke točke jedinične sfere S_X prostora $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$. Za svaku glatku točku $x \in S_X$ odredite jedinstven funkcional $f \in X^*, \|f\| = 1$ takav da $f(x) = \|x\|$.

Zadatak 9. Dokažite da je svaki unitaran prostor gladak i strogo konveksan.

Zadatak 10. Dokažite da je

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \|(x, y)\| := |x| + |x - y|$$

norma na $\mathbb{R}^2$. U normiranom prostoru $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ skicirajte jediničnu sferu S_X te odredite sve njene glatke točke.

Zadatak 11. Promotrimo normiran prostor $X := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$, gdje je

$$\|x\| := \frac{1}{3}\|x\|_1 + \frac{2}{3}\|x\|_\infty, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Dokažite da je operatorska norma funkcionala $f \in X^*$ definiranog s $f(x, y) := ax + by$ za neki $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ jednaka

$$\|f\| = \frac{3}{4} \max\{|a - b|, |a + b|\}.$$

(b) Odredite $(1, 1)^{\perp_{BJ}}$ u X. Je li X gladak prostor?

Zadatak 12. Dokažite da je

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \|(x, y)\| := \begin{cases} |y|, & \text{ako } |x| < |y|, \\ \frac{x^2+y^2}{2|x|}, & \text{ako } |x| \geq |y|, x \neq 0, \\ 0, & \text{ako } x = y = 0 \end{cases}$$

norma na $\mathbb{R}^2$. Dokažite da je normiran prostor $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ gladak, ali nije strogo konveksan.

Zadatak 13. Je li

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \|(x, y)\| := \|(x, \|(x + y, 2y)\|_2)\|_\infty, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

norma na $\mathbb{R}^2$? Ako jest, je li $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ strogo konveksan prostor?

Zadatak 14. Dokažite Propoziciju 9.

Zadatak 15. Dokažite Propoziciju 11.

Zadatak 16. Neka je X normiran prostor.

(a) Vrijedi li za sve vektore $x, y \in X$ implikacija

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \implies \|x - y\| = |\|x\| - \|y\||?$$

(b) Dokažite da je X strogo konveksan ako i samo ako za sve $x, y \in X$ vrijedi gornja implikacija.

Zadatak 17. Neka je X strogo konveksan normiran prostor. Dokažite da za sve $n \geq 2$ i $x_1, \ldots, x_n \in X$ vrijedi

$$\|x_1 + \cdots + x_n\| = \|x_1\| + \cdots + \|x_n\| \implies x_1 = 0 \text{ ili } \exists \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geq 0 \text{ takvi da } x_j = \alpha_j x_1 \text{ za sve } 2 \leq j \leq n.$$

Zadatak 18. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $x, y \in \mathbb{C}^n$ vektori.

(a) Dokažite da je $\|x+y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$ ako i samo ako $x = 0$ ili za svaki $1 \le j \le n$ postoji $\lambda_j \ge 0$ takav da $y_j = \lambda_j x_j$.

(b) Dokažite da je $\|x+y\|_\infty = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ ako i samo ako $x = 0$ ili postoji $1 \le j \le n$ i skalar $\lambda \ge 0$ takav da $y_j = \lambda x_j$, $|x_j| = \|x\|_\infty$ i $|y_j| = \|y\|_\infty$.

Zadatak 19. Dokažite da je

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \|(x,y)\| := \int_0^1 |x+ty|\,dt, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

norma na $\mathbb{R}^2$. Je li $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ strogo konveksan?

Zadatak 20. Neka je X normiran prostor. Na X^* standardno promatramo operatorsku normu. Dokažite:

(a) Ako je X^* strogo konveksan prostor, tada je X gladak.

(b) Ako je X^* gladak prostor, tada je X strogo konveksan.

Zadatak 21. Zadan je linearan operator $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ matricom $(a_{ij})_{ij}$ u kanonskoj bazi.

(a) Ako u domeni i kodomeni promatramo normu $\|\cdot\|_\infty$, dokažite da je

$$\|A\| = \max\{\|(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})\|_1 : 1 \le i \le n\}.$$

(b) Ako u domeni i kodomeni promatramo normu $\|\cdot\|_1$, dokažite da je

$$\|A\| = \max\{\|(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})\|_1 : 1 \le j \le n\}.$$

Zadatak 22. U ovisnosti o parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ zadan je linearan operator $A_\alpha : (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_\infty)$ matricom u kanonskoj bazi

$$A_\alpha := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Nađite nužne i dovoljne uvjete na α tako da $A_\alpha \perp_{BJ} I$ odnosno $I \perp_{BJ} A_\alpha$.

Literatura

[1] Lj. Arambašić, R. Rajić, *The Birkhoff-James orthogonality in Hilbert C^*–modules*, Linear Algebra Appl. **437** (2012), no. 7, 1913–1929.

[2] I. Gogić, *Uvod u funkcionalnu analizu*, interna skripta, https://web.math.pmf.unizg.hr/~ilja/UFA.pdf

[3] R. C. James, *Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), 265–292.

[4] R. C. James, *Inner product in normed linear spaces*, Bull. Am. Math. Soc. **53** (1947) 559–566.

[5] R. Nakamoto, S. Takahasi, *Norm equality condition in triangular inequality*, Sci. Math. Jpn. **55** (2002), no. 3, 463–466.