

Parcijalne diferencijalne jednačbe 1

Treći ispitni rok 29.8.2025.

1. Dana je zadaća

$$\begin{cases} xu_x + yu_y = 2xyu, \\ u(x^2, x) = e^{x^3} \sin x. \end{cases}$$

- (a) (5 bodova) Odredite pripadne karakteristične točke (na cijelom $\mathbb{R}^2$), te riješite zadaću na (otvorenom) prvom kvadrantu.
- (b) (3 boda) Postoji li C^1 rješenje zadaće na prvom kvadrantu ukoliko "početni" uvjet zamijenimo s $u(x, x) = e^{x^2}$? Dovoljno je dati argument (ne)postojanja, te u slučaju potvrdnog odgovora, opisati način dobivanja jednog takvog rješenja.

2. (a) (3 boda) Odredite eksplicitnu formulu Greenove funkcije za područje

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 + 1 > 0, x_1 + x_2 + 1 > 0\}.$$

- (b) (4 boda) Neka je Ω otvoreni jedinični krug oko ishodišta u $\mathbb{R}^d$ te $f, g \in C(\overline{\Omega})$. Ako je $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ rješenje zadaće

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = g, \end{cases}$$

pokažite da postoji konstanta $C > 0$ (neovisna o f, g) takva da vrijedi

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq C \left(\max_{\overline{\Omega}} |f| + \max_{\partial\Omega} |g| \right).$$

Uputa: Promotrite prikladne pomoćne subharmoničke funkcije te iskoristite jaki princip maksimuma za iste.

3. (5 bodova) Riješite početno-rubnu zadaću na $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \\ u(x, 0) = \sin x - x, \\ u(0, t) = 0. \end{cases}$$

4. (6 bodova) Pokažite da sljedeća zadaća na $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + 2u_t - 2u_{x_1} = 0, \\ u(\cdot, 0) = g, \\ u_t(\cdot, 0) = h, \end{cases}$$

ima jedinstveno rješenje, pri čemu su $g, h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Zatim izvedite eksplicitnu formulu za to rješenje.