

Parcijalne diferencijalne jednačbe 1

Drugi ispitni rok - 18. veljače 2026.

1. Za $a \in \mathbb{R}$ dana je zadaća

$$\begin{cases} xu_x + yu_y = u \\ u(a, y) = y^2. \end{cases}$$

- (a) (2 boda) Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ za koje dana početna krivulja nema karakterističnih točaka.
- (b) (5 bodova) Za one a za koje nema karakterističnih točaka riješite pripadnu zadaću te navedite domenu na kojoj je dobiveno rješenje.
- (c) (2 boda) Postoji li C^1 rješenje zadaće za preostale a ? Dovoljno je samo obrazložiti odgovor, odnosno, u slučaju potvrdnog odgovora nije potrebno konstruirati neko takvo rješenje.

2. (a) (3 boda) Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ograničen otvoren skup, te neka je R operator rotacije. Označimo s $w_R(\cdot, \cdot)$ korektor za $R(\Omega)$. Pokažite da je s $w(x, y) := w_R(Rx, Ry)$ dan korektor za Ω .

Podsjetnik: Korektor za dani $U \subseteq \mathbb{R}^d$ je funkcija $w : U \times \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je $y \mapsto w(x, y)$ harmonička za svaki fiksni $x \in U$ te da je $w(x, y) = \Phi(y - x)$ za $(x, y) \in U \times \partial U$.

- (b) (4 boda) Odredite korektor za skup $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 + x_2 > 0\}$.

3. (5 bodova) Riješite početnu zadaću na $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$

$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{2}(5u_{x_1x_1} + 2u_{x_1x_2} + 5u_{x_2x_2}) = 0 \\ u(x_1, x_2, 0) = \cos x_1 \sin x_2. \end{cases}$$

4. (a) (5 bodova) Riješite početnu zadaću na $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = e^{t+x_1} \cos x_2 \\ u(\cdot, 0) = x_1^2 - x_2^2 \\ u_t(\cdot, 0) = x_1^3 - 3x_1x_2^2 \end{cases}$$

- (b) (4 boda) Neka je u (jedinstveno) rješenje početne zadaće

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{na } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ u(\cdot, 0) = g \\ u_t(\cdot, 0) = h, \end{cases}$$

gdje su $g, h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$. Definiramo energiju $E : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ s

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} u_t^2 + |\nabla u|^2.$$

Pokažite da je E konstantna funkcija. Detaljno obrazložite svoj odgovor.