PDJ2 - Zadaća

Rok predaje: dan prije dogovorenog termina usmenog ispita

1. Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Definiramo niz funkcija $(\varphi_n) \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R})$ s

$$\varphi_n(x) = n \cdot \big[\varphi\big((1+1/n)x\big) - \varphi(x)\big] .$$

   Pokažite da (φ_n) konvergira u $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ te odredite limes.

2. Definiramo preslikavanje $Pf\frac{1}{x^2} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ s

$$\langle Pf\frac{1}{x^2}, \varphi\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\right].$$

   (a) Dokažite da je $Pf\frac{1}{x^2}$ dobro definirano te da je to distribucija reda (točno) 2.

   (c) Dokažite da vrijedi $(p.v.\frac{1}{x})' = -Pf\frac{1}{x^2}$.

3. Pokažite da je s $h(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin y}{y} e^{-|x-y|}dy$ dobro definirana jedna L^2 funkcija te odredite njenu Fourierovu transformaciju.

4. Pretpostavimo da je $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ takva da postoje $C, M > 0$ i $k \in \mathbb{N}_0$ takvi da za $|x| \geq M$ vrijedi $|f(x)| \leq C|x|^k$. Dokažite da je tada $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

5. Neka je $I = (-1,1)$ te $u \in \mathrm{H}^1(I)$. Pokažite da postoji niz funkcija $u_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ takvih da vrijedi $u_n|_I \xrightarrow{\mathrm{H}^1(I)} u$.