Parcijalne diferencijalne jednadžbe 2

Pismeni ispit 25.8.2025.

1. Provjerite je li sljedeći funkcional na $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ (odnosno $\mathscr{S}(\mathbb{R})$) distribucija (odnosno temperirana distribucija)
$$\langle T, \varphi \rangle = \int_1^\infty \varphi(\sqrt{\ln x})dx.$$

2. Dokažite ili opovrgnite kontraprimjerom svaku od sljedećih tvrdnji:

   (a) $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \implies f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$

   (b) $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \implies f * g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

3. (a) Pokažite da je $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, gdje je $f(x) = e^x \cos(e^x)$.

   (b) Odredite limes u $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ niza
$$f_n(x) = e^{nx} \sin(e^{nx}).$$

4. Izračunajte
$$\int_0^\infty \frac{\cos(2\pi x)}{1 + 4\pi^2 x^2} dx.$$

5. Neka je $\Omega = (0,1)^3 \subseteq \mathbb{R}^3$. Dana je matrična funkcija $A : \overline{\Omega} \to M_3(\mathbb{R})$ s
$$A(x_1, x_2, x_3) = \operatorname{diag}\left(1 + x_1^2, 2 + \sin(2\pi x_2), 3 + \frac{1}{2}\cos(2\pi x_3)\right).$$

   Pokažite da je bilinearna forma na $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ dana s
$$b(u,v) = \int_\Omega \langle A(x)\nabla u(x), \nabla v(x) \rangle$$
   neprekidna i koercitivna. Zatim pokažite da postoji jedinstveni $u \in H_0^1(\Omega)$ takav da je
$$b(u,v) = -(f, \partial_1 v), \qquad v \in H_0^1(\Omega)$$
   gdje je $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$.