Druga zadaća

Rok predaje: tri dana prije termina usmenog ispita, a najkasnije do 9.7.

1. Odredite Fourierovu transformaciju funkcija:

   (a) $f(x) = \sin^2(\pi x)$,

   (b) $g(x) = \sin(\pi x^2)$,

   (c) $h(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin y}{y} e^{-|x-y|} dy$

2. Pretpostavimo da je $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ takva da postoje $C, M > 0$ i $k \in \mathbb{N}_0$ takvi da za $|x| \geq M$ vrijedi $|f(x)| \leq C|x|^k$. Dokažite da je tada $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

3. Riješite Cauchyjevu zadaću na $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(0, \cdot) = 0 \\ u_t(0, \cdot) = H''(2 - |x|) \end{cases}$$

   gdje je $H := \chi_{\mathbb{R}_0^+}$ Heavisideova funkcija.

4. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ograničen. Promotrimo sljedeću zadaću

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A\nabla u) = f, \quad \text{na } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

   pri čemu su $A \in L^\infty(\Omega; M_d(\mathbb{R}))$ i $f \in L^2(\Omega)$. Pretpostavimo dodatno da postoji $\beta > 0$ takav da A zadovoljava tzv. **uniformnu eliptičnost**

$$A(x)\xi \cdot \xi \geq \beta|\xi|^2, \qquad \text{za sve } x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^d.$$

   Iskažite slabu formulaciju problema te pokažite da postoji jedinstveno slabo rješenje.

5. Neka je A kao u prethodnom zadatku. Pretpostavimo da je $u \in H^1(\Omega)$ ograničeno slabo rješenje

$$-\mathrm{div}\,(A\nabla u) = 0,$$

   tj. za svaku $v \in H_0^1(\Omega)$ vrijedi

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v = 0,$$

   te neka je $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija klase C^∞. Stavimo $w := \varphi(u)$. Dokažite da je w slabo *podrješenje*, tj. da vrijedi

$$\int_\Omega A\nabla w \cdot \nabla v \leq 0,$$

   za svaku $v \in H_0^1(\Omega)$ takvu da je $v \geq 0$.