# Parcijalne diferencijalne jednadžbe 2

## Drugi ispitni rok - 29.6.2026.

1. (6 bodova) Provjerite je li s $T_f$ dan element $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, odnosno $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, ako je

   (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

   (b) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{1+e^{2x^2}}$.

2. (6 bodova)

   (a) Odredite Fourierovu transformaciju funkcije $f(x) = \operatorname{sgn}(x)e^{-|x|}$.

   (b) Izračunajte integral
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+2x^2+1} dx.$$

3. (6 bodova) Odredite limese u $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ nizova

   (a) $f_n(x) = ne^{-n|x|}$,

   (b) $g_n(x) = n^2 \operatorname{sgn}(x)e^{-n|x|}$.

4. (6 bodova) Neka je $I$ ograničen interval u $\mathbb{R}$. Neka su $f, g \in \mathrm{H}^1(I)$ te $f_n, g_n \in C^\infty(\bar{I})$ takve da vrijedi $f_n \xrightarrow{\mathrm{H}^1} f$ i $g_n \xrightarrow{\mathrm{H}^1} g$.Y

   (a) Pokažite da je $fg \in \mathrm{L}^2(I)$.

   (b) Pokažite da vrijedi $f_n g_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2} fg$.

5. (6 bodova) Neka je $I$ ograničen interval u $\mathbb{R}$ te neka su $a, b \in L^\infty(I)$ takve da je

   - $a(x) \geq a_0 > 0$ za s.s. $x \in I$
   - $\|b\|_{L^\infty} < \frac{a_0}{1+C_P^2}$, gdje je $C_P$ konstanta u Poincareovoj nejednakosti za $I$.

   Pokažite da je bilinearna forma $B(\cdot,\cdot)$ dana na $H_0^1(I)$ s
   $$B(u,v) = \int_I au'v' + bu'v$$
   neprekidna i koercitivna.

# Rješenja

1. (a) Funkcija $f$ se ne nalazi u $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$; kako je $\cos 0 = 1$, postoji $\varepsilon > 0$ na kojem je $\cos x \geq \frac{1}{2}$, pa je $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left|\frac{\cos x}{x}\right| dx \geq \frac{1}{2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dx}{|x|} = \infty$, pa $f$ ne definira (regularnu) distribuciju).

   (b) Možemo odmah vidjeti da je $f \in C(\mathbb{R})$, pa je svakako $T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Dodatno, za $|x| \geq 1$ je $e^{x^2} \leq e^{2x^2}$, odnosno $0 < f(x) \leq 1$. Kako je $f$ ograničena, slijedi da definira element $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

2. (a) Koristeći tablične Fourierove transformacije, vidimo da $f$ možemo zapisati kao $f = g - \widetilde{g}$, gdje je $g(x) = e^{-x}H(x)$. Sada je

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(-\xi) = \frac{1}{1+2\pi i\xi} - \frac{1}{1-2\pi i\xi} = -\frac{4\pi i\xi}{1+4\pi^2\xi^2}.$$

   (b) Označimo s $h(x) = \frac{x}{1+x^2} \in L^2(\mathbb{R})$. Tada je prema Plancherelovom teoremu traženi integral jednak $\|\widehat{h}\|^2_{L^2}$. Dalje vidimo kako $h$ možemo zapisati kao

$$h(x) = -\frac{1}{2i}\left(-\frac{4\pi i(x/2\pi)}{1+4\pi^2(x/2\pi)^2}\right) = -\frac{1}{2i}\widehat{f}(x/2\pi) = i\pi\widehat{f(2\pi\cdot)}(x),$$

   gdje je $f$ funkcija iz (a) dijela zadatka. Stoga je $\widehat{h} = \frac{1}{4\pi i}f(2\pi\cdot)$, pa preostaje izračunati

$$\|f(2\pi\cdot)\|^2_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{sgn}(2\pi x)e^{-2\pi|x|}\right)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi|x|}dx = \frac{1}{2\pi},$$

   pa je traženi integral jednak $|i\pi|^2 \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{\pi}{2}$.

3. (a) Za $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ imamo

$$\int_{\mathbb{R}} ne^{-nx}\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x}\varphi(x/n)dx \xrightarrow{\text{LTDK}} 2\varphi(0),$$

   pa je limes jednak $2\delta_0$.

   (b) Primijetimo kako je $f_n \in C^1(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \cap C(\mathbb{R})$, te je tada u distribucijskom smislu $f_n' = -g_n$. Stoga je distribucijski limes niza $g_n$ jednak $-2\delta_0'$.

4. (a) Kako smo na vježbama pokazali da je $H^1(I) \subseteq C(\overline{I})$, slijedi da je $fg$ neprekidna i ograničena funkcija na intervalu $I$, pa kako je on ograničen, slijedi posebno i da je taj produkt u $L^2(I)$.

   (b) Kako imamo ocjenu $\|u\|_{C(\overline{I})} \leq C\|u\|_{H^1(I)}$ za sve $u \in H^1(I)$, zaključujemo kako zbog $f_n \xrightarrow{H^1} f$ niz $(f_n)$ mora biti ograničen u $H^1$, pa onda i u $C(\overline{I})$ (tj. $\|f_n\|_{C(I)} \leq C_1$ za neku konstantu $C_1$). Sada ocjenjujemo

$$\begin{aligned}\|f_ng_n - fg\|_{L^2} &\leq \|f_n(g_n-g)\|_{L^2} + \|g(f_n-f)\|_{L^2} \\ &\leq \underbrace{\|f_n\|_{C(I)}}_{\leq C_1}\underbrace{\|g_n-g\|_{L^2}}_{\to 0} + \|g\|_{C(I)}\underbrace{\|f_n-f\|_{L^2}}_{\to 0} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

5. Za $u, v \in H_0^1(I)$ standardno dobijemo

$$|B(u,v)| \leq \int_I |au'v'| + |bu'v| \leq (\|a\|_{L^\infty} + \|b\|_{L^\infty})\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}.$$

S druge strane, za $u \in H_0^1(I)$ je

$$\int_I bu'u \geq -\int_I |bu'u| \geq -\|b\|_{L^\infty}\|u'\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \geq -\|b\|_{L^\infty}\|u\|_{H_0^1}^2,$$

pa je

$$B(u,u) = \int_I a(u')^2 + bu'u \geq a_0\|u'\|_{L^2}^2 - \|b\|_{L^\infty}\|u\|_{H_0^1} \geq \left(\frac{a_0}{1+C_P^2} - \|b\|_{L^\infty}\right)\|u\|_{H^1}^2,$$

pa je prema drugom uvjetu iz zadatka forma koercitivna.

**Tablica Fourierovih transformacija i svojstva na $\mathscr{S}$**

| $f(x)$ | $\mathscr{F}(f)(\xi)$ |
|---|---|
| $\delta_0$ | $1$ |
| $\chi_{[a,b]}$ | $\dfrac{\sin\big(\pi(b-a)\xi\big)}{\pi\xi}\, e^{-\pi i(a+b)\xi}$ |
| $e^{-ax}H(x), \quad \text{Re }(a)>0$ | $\dfrac{1}{a+2\pi i\xi}$ |
| $\dfrac{x^k}{k!}e^{-ax}H(x), \quad \text{Re }(a)>0$ | $\dfrac{1}{(a+2\pi i\xi)^{k+1}}$ |
| $e^{-a\|x\|}, \quad \text{Re }(a)>0$ | $\dfrac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2}$ |
| $e^{-ax^2}, \quad a>0$ | $\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2}$ |
| $\cos(ax)$ | $\dfrac{\delta_{\frac{a}{2\pi}}+\delta_{-\frac{a}{2\pi}}}{2}$ |
| $\sin(ax)$ | $\dfrac{\delta_{\frac{a}{2\pi}}-\delta_{-\frac{a}{2\pi}}}{2i}$ |
| $\cos(ax^2)$ | $\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\cos\left(\dfrac{\pi^2\xi^2}{a}-\dfrac{\pi}{4}\right)$ |
| $\sin(ax^2)$ | $-\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\sin\left(\dfrac{\pi^2\xi^2}{a}-\dfrac{\pi}{4}\right)$ |
| $\text{v.p. } \frac{1}{x}$ | $-i\pi\,\text{sgn}(\xi)$ |
| $e^{-ix^2}$ | $\sqrt{2\pi}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2}\right)e^{i\pi^2\xi^2}$ |
| $e^{-ax^2}, \quad \text{Re }(a)\geq 0$ | $\sqrt{\dfrac{\pi}{\|a\|}}\, e^{-i\theta_0/2}e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}, \qquad \theta_0=\arctan\left(\dfrac{\text{Im }(a)}{\text{Re }(a)}\right)$ |

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}(\alpha f+\beta g) &= \alpha\mathscr{F}(f)+\beta\mathscr{F}(g),\\
\mathscr{F}(\tau_a f)(\xi) &= e^{-2\pi i a\xi}\,\mathscr{F}(f)(\xi),\\
\mathscr{F}(f(ax))(\xi) &= \frac{1}{|a|}\mathscr{F}(f)\left(\frac{\xi}{a}\right),\\
\mathscr{F}(\mathscr{F}(f))(\xi) &= f(-\xi),\\
\mathscr{F}(f^{(n)})(\xi) &= (2\pi i\xi)^n\mathscr{F}(f)(\xi),\\
\mathscr{F}(x^n f(x))(\xi) &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n\big(\mathscr{F}(f)\big)^{(n)}(\xi),\\
\mathscr{F}(f*g)(\xi) &= \mathscr{F}(f)(\xi)\,\mathscr{F}(g)(\xi).
\end{aligned}
$$