Numeričko rješavanje PDJ - Vježbe

Zadatak 1. Diskretizirajte diferencijalnu jednadžbu

$$u_t = cu_{xx} + cu_{yy}, \quad x, y \in [0,1],\ t \in [0,T],$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y),\ x,y \in [0,1], \quad u(x,y,t) = 0,\ (x,y) \in \partial[0,1] \times [0,1],$$

gdje je $c > 0$ i $c \in \mathbb{R}$.

Za diskretizaciju po vremenskoj varijabli iskoristite eksplicitnu, potpuno implicitnu i Crank-Nicolsonovu metodu. Pod kojim uvjetima su metode stabilne? Kolika je pogreška diskretizacije?

Zadatak 2. Diskretizirajte diferencijalnu jednadžbu

$$u_t = cu_{xx}, \quad x \in [0,1],\ t \in [0,T],$$

uz von Neumannove rubne uvjete

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,1], \quad u_x(0,t) = 0,\ u_x(1,t) = 0,\ t > 0,$$

gdje je $c > 0$ i $c \in \mathbb{R}$.

Za diskretizaciju po vremenskoj varijabli iskoristite eksplicitnu, potpuno implicitnu ili Crank-Nicolsonovu metodu.

Zadatak 3. Poissonova diferencijalna jednadžba

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y), \quad x, y \in [0,1],$$

može se diskretizirati na sljedeći mačin:

$$\frac{1}{h^2}\left(\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \frac{1}{6}\Delta_x^2\Delta_y^2\right) u_{i,j} = f_{i,j}$$

gdje je $h = 1/N$, $x_i = i \cdot h,\ y_j = j \cdot h$ i $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$ a

$$\Delta_x^2 u_{i,j} = u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j} \quad \text{i} \quad \Delta_y^2 u_{i,j} = u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}.$$

Pokažite da je lokalna pogreška metode reda $\mathcal{O}(h^2)$.

Je li matrica sustava regularna?

Zadatak 4. Metodu iz prošlog zadatka možemo modificirati tako da 'malo' promijenimo desnu stranu:

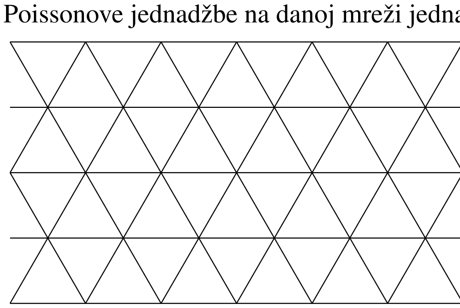
$$\frac{1}{h^2}\left(\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \frac{1}{6}\Delta_x^2\Delta_y^2\right) u_{i,j} = \left(\mathcal{I} + \frac{1}{12}\Delta_x^2\Delta_y^2\right) f_{i,j}$$

gdje je

$$\mathcal{I} f_{i,j} = f_{i,j}.$$

Pokažite da je sada lokalna pogreška metode reda $\mathcal{O}(h^4)$.

Zadatak 5. Nađite diskretizaciju Poissonove jednadžbe na danoj mreži jednakostraničnih trokuta:



Formula za svaki unutarnji čvor mreže treba uključivati 6 susjednih čvorova.

Zadatak 6. Diskretizirajte diferencijalnu jednadžbu

$$u_t = -u_{xx}, \quad x \in [0,1],\ t \in [0,T],$$

uz Dirichletove rubne uvjete

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,1], \quad u(0,t) = u_l(t),\ u_(1,t) = u_r(t),\ t > 0.$$

Za diskretizaciju iskoristite eksplicitnu, potpuno implicitnu i Crank-Nicolsonovu metodu. Koje su metode (bezuvjetno) stabilne?

Zadatak 7. Diskretizirajte valnu jednadžbu

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in [0,1],\ t \in [0,T],\ c \in \mathbb{R},$$

uz Dirichletove rubne uvjete

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), \quad x \in [0,1], \quad u(0,t) = u_l(t),\ u_(1,t) = u_r(t),\ t > 0.$$

Koliki je red metode i je li metoda bezuvjetno stabilna?

Zadatak 8. Pokažite da je za diskretizaciju miješane derivacije

$$u_{xy}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_{i-1}, y_{j-1}) + u(x_{i+1}, y_{j+1}) - u(x_{i+1}, y_{j-1}) - u(x_{i-1}, y_{j+1})}{4h_x h_y}$$

Zadatak 9. Za diferencijalnu jednadžbu

$$u_t = \beta u_{xx}, \quad x \in [0,1],\ t \in [0,T],\ c \in \mathbb{R},$$

definiramo shemu

$$u_{i,j+1} = \alpha u_{i,j} + \frac{1-\alpha}{2}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right)$$

gdje je $\alpha = 1 - 2\beta\lambda$, $\lambda = \Delta t / h^2$. Pokažite da je shema konzistentna i odredite red konzistencije.

Zadatak 10. Pokažite da diferencijska shema

$$\left(\mathcal{I} - \frac{\Delta t \beta}{2h^2}\Delta_x^2\right)\left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t}\right) = \frac{\beta}{h^2}\left(\mathcal{I} - \frac{1}{12}\Delta_x^2\right)\Delta_x^2 u_{i,j}$$

za diferencijalnu jednadžbu

$$u_t = \beta u_{xx}, \quad x \in [0,1],\ t \in [0,T],\ \beta \in \mathbb{R},$$

je reda točnosti $\mathcal{O}((\delta t)^2 + h^4)$. S Δ_x^2 i $\mathcal{I}$ je označeno

$$\Delta_x^2 u_{i,j} = u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j} \quad \text{i} \quad \mathcal{I} u_{i,j} = u_{i,j}.$$