Binomna raspodjela teorem:

$np - q \le x_0 \le np + p$

x_0 – je ona vrijednost varijable x kojoj pripada najveća vjerojatnost.

Dokaz:

1. Ako je x_0 zaista varijabla s najvećom vjerojatnosti, onda vrijedi:

$$P(x_0 - 1) \le P(x_0) \qquad (1)$$

Upotrijebimo rekurzivnu formulu:

$$\frac{P(x)}{P(x-1)} = \frac{n-x+1}{x}\frac{p}{q}$$

$$P(x_0) = \frac{n-x_0+1}{x_0}\frac{p}{q}P(x_0-1)$$

koja se uvrsti u (1)

$$P(x_0-1) \le \frac{n-x_0+1}{x_0}\frac{p}{q}P(x_0-1)$$

Kraćenjem člana $P(x_0-1)$ dobiva se:

$$1 \le \frac{n-x_0+1}{x_0}\frac{p}{q}$$

odnosno

$$x_0 q \le np - x_0 p + p$$

$$q = 1 - p$$

$$x_0(1-p) \le np - x_0 p + p$$

$$x_0 - x_0 p \le np - x_0 p + p$$

$$x_0 \le np + p$$

2. Dokažimo lijevu stranu početne nejednakosti $np - q \le x_0 \le np + p$:

$$P(x_0) \ge P(x_0+1) \qquad (2)$$

$$\frac{P(x)}{P(x-1)} = \frac{n-x+1}{x}\frac{p}{q}$$

$$x = x_0 + 1$$

$$\frac{P(x_0+1)}{P(x_0+1-1)}=\frac{n-(x_0+1)+1}{x_0+1}\frac{p}{q}$$

$$P(x_0+1)=\frac{n-x_0}{x_0+1}\frac{p}{q}P(x_0)$$

Uvrstimo gornji izraz u (2)

$$P(x_0)\geq\frac{n-x_0}{x_0+1}\frac{p}{q}P(x_0)$$

odnosno

$$1\geq\frac{n-x_0}{x_0+1}\frac{p}{q}$$

$$x_0q+q\geq np-x_0p$$

$$x_0(1-p)+(1-p)\geq np-x_0p$$

$$x_0-x_0p+q\geq np-x_0p$$

$$x_0\geq np-q$$

Nadalje, razlika krajnjih granica nejednakosti $np-q\leq x_0\leq np+p$ iznosi:

$$(np+p)-(np-q)=np+p-np+q=p+q=1$$

Ovo implicira da postoje samo dvije opcije:

1. $(np-q)$ nije cijeli broj, tada ni $(np+p)$ nije cijeli jer je njihova razlika 1. Između tih granica postoji cijeli broj x_0 koji je najvjerojatniji.

2. $(np-q)$ je cijeli broj, tada je i $(np+p)$ cijeli broj. Binomna raspodjela za ta dva cijela broja ima najveću vjerojatnost (Primjer iz predavanja, bacanje 7 novčića).

Izvod Poissonove raspodjele iz binomne:

Binomna raspodjela:

$$P(x;n,p)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=\frac{n!}{(n-x)!\cdot x!}p^x q^{n-x}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-x+1)}{x!}p^x q^{n-x}$$

Uvrstit ćemo $m=np$, odnosno $p=\frac{m}{n}$

$$P(x;n,p)=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-x+1)}{x!}\left(\frac{m}{n}\right)^x\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-x}$$

$$P(x;n,p)=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-x+1)}{x!}\frac{m^x}{n^x}\left(1-\frac{m}{n}\right)^n\left(1-\frac{m}{n}\right)^{-x}$$

Spojit ćemo brojnik prvog razlomka i nazivnik drugog:

$$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-x+1)}{n^x}$$

U brojniku imamo x članova, isto tako i u nazivniku. Stoga možemo pisati:

$$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-x+1)}{n^x}=\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\frac{(n-2)}{n}\cdots\frac{(n-x+1)}{n}*=$$

$$=1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)$$

Dakle, umjesto:

$$P(x;n,p)=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-x+1)}{x!}\frac{m^x}{n^x}\left(1-\frac{m}{n}\right)^n\left(1-\frac{m}{n}\right)^{-x}$$

pišemo:

$$P(x;n,p)=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{x!}m^x\left(1-\frac{m}{n}\right)^n\left(1-\frac{m}{n}\right)^{-x}$$

Sada ćemo uvesti uvjet da $n\to\infty$

$$P(x;n,p)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{x!}m^x\left(1-\frac{m}{n}\right)^n\left(1-\frac{m}{n}\right)^{-x}$$

Pogledat ćemo kako $\lim\limits_{n\to\infty}$ utječe na svaki član gornjeg izraza:

A) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)=1$

Kada $n\to\infty$ svaka ova zagrada postaje 1!

B) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n}$

Sjetimo se: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^{\xi n}=e^{\delta\xi}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-m)}{n}\right)^{1\cdot n}=e^{-m}$$

C) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{m}{n}\right)^{x}=1$ jer je $\frac{m}{n}$ teži nuli, a $1^x = 1$ za svaki x.

$$P(x;m)=\lim_{n\to\infty}P(x;n,p)=\frac{m^x}{x!}\cdot e^{-m}$$

Očekivana vrijednost Poissonove raspodjele:

$$P(x;m) = f(x) = \frac{m^x}{x!} \cdot e^{-m} \text{ za } x = 0,1,2,...$$

$$\bar{x} = \mu = \langle x \rangle = \sum_{x=0}^{\infty} f(x)x = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^x}{x!} \cdot e^{-m} x = \sum_{x=1}^{\infty} me^{-m} \frac{m^{x-1}}{(x-1)!} =$$

$$= me^{-m} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{m^{x-1}}{(x-1)!}$$

Prilikom skraćivanja razlomka s x početni indeks sumiranja se mora povećati za 1 jer smo izgubili prvi član sume s iznosom 0.

Sjetimo se:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Rješenje se dobiva supstitucijom:

$$\begin{pmatrix} x - 1 = n \\ x = n - 1 \end{pmatrix}$$

unutar izraza:

$$\bar{x} = \mu = \langle x \rangle = me^{-m} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{m^{x-1}}{(x-1)!} = me^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{n!} = me^{-m} e^m = m$$

uz pažnju na zamjenu početne vrijednosti sume:

$$\begin{pmatrix} x = 1 \\ n = x - 1 = 1 - 1 = 0 \end{pmatrix}$$

Izvod hipergeometrijske raspodjele iz binomne:

Kada n→∞, tada hipergeometrijska raspodjela postaje binomna.

$$P(x)=\frac{\binom{M}{x}\cdot\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Uvest ćemo $p=\frac{M}{N}$, $q=\frac{N-M}{N}$ jer su to inicijalne vjerojatnosti da iz N elemenata izvučemo element koji ima obilježje A (p), odnosno nema obilježje A (q).

Prije toga uvedimo $Np=M$ i $Nq=N-M$ radi jednostavnijeg izvoda.

$$P(x)=\frac{\binom{N_p}{x}\cdot\binom{N_q}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\frac{\frac{N_p!}{(N_p-x)!\cdot x!}\cdot\frac{N_q!}{(N_q-(n-x))!\cdot(n-x)!}}{\frac{N!}{(N-n)!\cdot n!}}$$

$$\binom{n}{x}=\frac{n!}{(n-x)!\cdot x!}$$

$$P(x)=\binom{n}{x}\frac{\frac{N_p!}{(N_p-x)!}\cdot\frac{N_q!}{(N_q-(n-x))!}}{\frac{N!}{(N-n)!}} \qquad (1)$$

Skratit ćemo svaki član:

a) $$\frac{N_p!}{(N_p-x)!}=\frac{N_p(N_p-1)\cdots(N_p-(x-1))(N_p-x)(N_p-(x+1))\cdots}{(N_p-x)!}=$$
$$=N_p(N_p-1)\cdots(N_p-(x-1))$$

b) $$\frac{N_q!}{(N_q-(n-x))!}=\frac{N_q(N_q-1)\cdots(N_q-(n-x-1))(N_q-(n-x))(N_q-(n-x+1))\cdots}{(N_q-(n-x))!}=$$
$$=N_q(N_q-1)\cdots(N_q-(n-x-1))$$

c) $$\frac{N!}{(N-n)!}=N(N-1)\cdots(N-(n-1))$$

To uvrstimo u (1).

$$P(x)=\binom{n}{x}\frac{\left[N_p\left(N_p-1\right)\cdots\left(N_p-(x-1)\right)\right]\cdot\left[N_q\left(N_q-1\right)\cdots\left(N_q-(n-x-1)\right)\right]}{\left[N(N-1)\cdots\left(N-(n-1)\right)\right]}$$

Koliko članova ima svaka uglata zagrada?

Prva ima x članova, druga $(n-x)$, a treća n članova. Ukupni broja članova u brojniku jednak je n, kao što je i broj članova u nazivniku.

Gornji izraz ćemo pomnožiti s $\frac{N^n}{N^n}$

$$P(x)=\binom{n}{x}\frac{N^n}{N^n}\frac{\left[N_p\left(N_p-1\right)\cdots\left(N_p-(x-1)\right)\right]\cdot\left[N_q\left(N_q-1\right)\cdots\left(N_q-(n-x-1)\right)\right]}{\left[N(N-1)\cdots\left(N-(n-1)\right)\right]}$$

Sjetimo se da je $\frac{N_p}{N}=p$ i $\frac{N_q}{N}=q$

$$P(x)=\binom{n}{x}\frac{\left[p\left(p-\frac{1}{N}\right)\cdots\left(p-\frac{x-1}{N}\right)\right]\cdot\left[q\left(q-\frac{1}{N}\right)\cdots\left(q-\frac{n-x-1}{N}\right)\right]}{\left[1\left(1-\frac{1}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{N}\right)\right]}$$

Uvodimo da N→∞

$$\lim_{N\to\infty}\left[p\left(p-\frac{1}{N}\right)\cdots\left(p-\frac{x-1}{N}\right)\right]=ppp\cdots p=p^x$$

$$\lim_{N\to\infty}\left[q\left(q-\frac{1}{N}\right)\cdots\left(q-\frac{n-x-1}{N}\right)\right]=qqq\cdots q=q^{n-x}$$

$$\lim_{N\to\infty}\left[1\left(1-\frac{1}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{N}\right)\right]=1$$

$$P(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$